

3. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Viktor Němeček 15. 10. 2019

<https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/dm1920/>

Příklad 1. Určete, kolik je na dané množině relací:

- a) reflexivních
- b) symetrických
- c) antisymetrických

Příklad 2. Na konečné množině najděte relaci, která je symetrická i antisymetrická, a relaci, která není ani symetrická ani antisymetrická.

Příklad 3. Nechť X je konečná množina a R a S nechť jsou relace na této množině. Rozhodněte, zda platí tvrzení: „Má-li R i S vlastnost V , pak i $R \oplus S$ má vlastnost V “ pro $V \in \{\text{reflexivní, tranzitivní, symetrická}\}$ a $\oplus \in \{\cap, \cup, \setminus, \Delta, \circ, {}^{-1}\}$.

	$R \cap S$	$R \cup S$	$R \setminus S$	$R \Delta S$	$R \circ S$	R^{-1}
reflexivní						
symetrická						
antisymetrická						
tranzitivní						

O číslu $a \in \mathbb{Z}$ řekneme, že dělí $b \in \mathbb{Z}$, právě pokud $b/a \in \mathbb{Z}$. „ a dělí b “ můžeme také zapsat jako „ $a \mid b$ “.

Příklad 4. Rozhodněte, zda jsou následující relace na množině X ekvivalence. Pokud ano, popište třídy ekvivalence.

- a) $X = \mathbb{N}$, p je dané přirozené číslo, $(a, b) \in R \Leftrightarrow p \mid (a - b)$.
- b) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(a, b) \in R \Leftrightarrow a \mid b \wedge b \mid a$.
- c) $X = \mathbb{N}$, $(a, b) \in R \Leftrightarrow a \mid b \vee b \mid a$.
- d) $X = \mathbb{N}$, $(a, b) \in R \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : c \mid b \wedge c \mid a$.
- e) $X = \mathbb{N}$, $(a, b) \in R \Leftrightarrow \exists c > 1 \in \mathbb{N} : c \mid b \wedge c \mid a$.
- f) $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $((a, b), (c, d)) \in R \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
- g) $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $(a, b) \in R \Leftrightarrow$ Existuje bijekce z a do b .
- h) $X =$ Množina všech přímek v rovině, $(a, b) \in R \Leftrightarrow a$ a b jsou rovnoběžné.
- i) $X = \{a, b, c, d, e\}$, R_9 .

R_9	a	b	c	d	e
a	1	0	1	0	0
b	0	1	0	1	1
c	1	0	1	0	0
d	0	1	0	1	1
e	0	1	0	1	1

* **Příklad 5.** Kolik je na n -prvkové množině funkcí takových, že pro každé x platí $f(x) = f(f(x))$? Nečekejte že to vyjde kdovíjak hezky. Pokud si všimnete souvislosti s ekvivalencemi, je to sice fajn, ale snažit se napřed vyjádřit počet ekvivalencí je slepá ulička – to vyjde ještě mnohem hůř.