

6. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Viktor Němeček 19. 11. 2019

<https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/dm1920/>

Definice. *Grafem* G rozumíme dvojici (V, E) , kde V je neprázdná konečná množina vrcholů a E je množina neuspořádaných dvojic prvků množiny V (ne nutně všech).

Definice. *Cesta* je graf $P_n(\{1, \dots, n+1\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n, n+1\}\})$

Definice. *Kružnice* je graf $C_n(\{1, \dots, n\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\})$

Definice. *Úplný graf* je graf $K_n(\{1, \dots, n\}, \binom{V}{2})$, kde značením $\binom{M}{k}$ pro množinu M a nezáporné celé číslo k myslíme množinu všech k -prvkových podmnožin množiny M .

Definice. O grafu řekneme že je *bipartitní*, pokud jeho vrcholy můžeme rozdělit do množin A a B tak, že $\forall \{u, v\} \in E : u \in A \wedge v \in B$.

Definice. *Úplný bipartitní graf* je graf $K_{a,b}(\{1, \dots, a+b\}, \{\{u, v\} \mid u \leq a \wedge v > a\})$, kde značením $\binom{M}{k}$ pro množinu M a nezáporné celé číslo k myslíme množinu všech k -prvkových podmnožin množiny M .

Definice. *Doplňěk grafu* $G(V, E)$ je graf $\overline{G}(V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Definice. *Cesta v grafu* je posloupnost $P = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, e_{n-1}, v_n)$ taková, že $\forall i \in \{1, \dots, n\} : v_i \in V, \forall i \in \{1, \dots, n-1\} : e_i \in E \wedge e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ všechna v_i jsou různá. Říkáme, že P je cesta z v_1 do v_n délky n .

Definice. Graf G je *souvislý*, pokud pro libovolné dva různé vrcholy $v_i, v_j \in V$ existuje cesta z v_i do v_j .

Definice. Graf $G'(V', E')$ je *podgraf* grafu $G(V, E)$, pokud $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ a $\forall e \in E' : e \subseteq V'$. Neformálně tedy vezmeme z G některé vrcholy a některé hrany na těch vybraných vrcholech.

Definice. Graf $G'(V', E')$ je *indukovaný podgraf* grafu $G(V, E)$, pokud $V' \subseteq V, E = \{\{v_1, v_2\} \mid \{v_1, v_2\} \in E \wedge v_1, v_2 \in V'\}$ a $\forall e \in E' : e \subseteq V'$. Neformálně tedy vezmeme z G některé vrcholy a všechny hrany na těch vybraných vrcholech. Říkáme, že G' je podgraf indukovaný množinou V' .

Definice. Mějme relaci R na vrcholech grafu G definovanou tak, že $vRu \Leftrightarrow \exists G$ existuje cesta mezi u a v . Tato relace je ekvivalence. Její třídy nazveme *komponenty souvislosti*.

Definice. Graf $G(V, E)$ a $G'(V', E')$ jsou *izomorfní*, právě když existuje bijekce $f : V \rightarrow V'$, taková, že $\{v_1, v_2\} \in E \Leftrightarrow \{f(v_1), f(v_2)\} \in E'$. f pak nazveme *izomorfismus mezi G a G'* .

Definice. *Automorfismus* je izomorfismus G sama do sebe. Automorfismu, který posílá každý vrchol sám na sebe říkáme *triviální*.

Definice. *Sousedství* vrcholu v v grafu $G(V, E)$ značíme $N(v)$ a rozumíme jím množinu vrcholů u takových, že $(u, v) \in E$

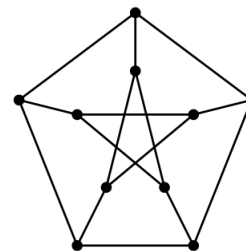
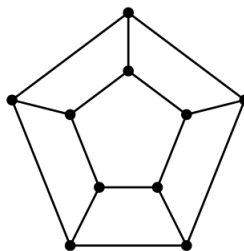
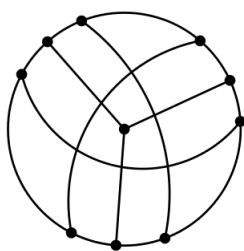
Definice. *Stupněm vrcholu* v rozumíme hodnotu $|N(v)|$ a značíme ho $\deg(v)$.

Definice. *Izolovaný vrchol* je vrchol stupně 0.

Věta (princip sudosti). Pro každý graf je $\sum_{v \in V} \deg(v)$ sudé.

Definice. *Strom* je graf, v němž mezi každými dvěma vrcholy vede právě jedna cesta.

Příklad 1. U následujících tří grafů rozhodněte, zda je nějaká dvojice izomorfní:



Příklad 2. Dokažte, že pokud graf obsahuje lichou kružnici jako podgraf, obsahuje lichou kružnici i jako indukovaný podgraf.

Příklad 3. Mějme graf $G(V, E)$. Dokažte, že tento graf má (ne nutně indukovaný) podgraf G' , který je bipartitní, ale má alespoň $\lceil \frac{|E|}{2} \rceil$ hran.

Příklad 4. Rozhodněte, zda existuje graf, jehož skóre je

- a) 2, 2, 2, 2, 2, 2
- b) 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
- c) 0, 1, 2, 3, $\dots$, $n - 1$.

Příklad 5. Najděte nejmenší možný příklad (s co nejmenším počtem vrcholů) dvou souvislých neizomorfních grafů se stejným skóre.

Příklad 6. Zkuste navrhnout algoritmus, který zkontroluje, zda je daná posloupnost čísel skóre nějakého grafu v lineárním čase vzhledem k počtu vrcholů a hran. *Varování: Rozmyslete si, že nejpřímochařejší způsob implementace selže a nejpřímochařejší způsob, jak toto selhání napravit, vede na příliš pomalý algoritmus.*

Příklad 7. Mějme graf, o němž platí, že mezi každými dvěma vrcholy téhož stupně vede právě jedna cesta. Je tento graf už nutně o strom?

****Příklad 8.** Charakterizujte množinu všech grafů, v nichž mezi každými dvěma vrcholy téhož stupně vede právě jedna cesta.

Příklad 9. Mějme strom G a několik (alespoň 2) jeho souvislé podgrafy $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2), \dots, G_n(V_n, E_n)$. Dokažte, že když pro každé dvě k, ℓ platí, že $V_k \cup V_\ell \neq \emptyset$, pak také

$$\bigcup_{i=1}^n V_i \neq \emptyset.$$

Ukažte, že kdyby G nemusel být strom, pak toto tvrzení neplatí.

Příklad 10. Mějme strom G na alespoň dvou vrcholech a jeho vrchol v . Dokažte, že G má alespoň $\deg(v)$ listů.

Příklad 11. Mějme strom $G(V, E)$ a nějaký jeho automorfismus f . Dokažte, že buď existuje vrchol v takový, že $f(v) = v$, nebo dva vrcholy u, v takové, že $f(u) = v$ a $f(v) = u$. *Nápověda: hledejte u a v takové, že $\{u, v\} \in E$.*