

7. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Viktor Němeček 26. 11. 2019

<https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/dm1920/>

Definice. *Grafem* G rozumíme dvojici (V, E) , kde V je neprázdná konečná množina vrcholů a E je množina neuspořádaných dvojic prvků množiny V (ne nutně všech).

Definice. *Cesta* je graf $P_n(\{1, \dots, n+1\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n, n+1\}\})$

Definice. *Kružnice* je graf $C_n(\{1, \dots, n\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\})$

Definice. *Úplný graf* je graf $K_n(\{1, \dots, n\}, \binom{V}{2})$, kde značením $\binom{M}{k}$ pro množinu M a nezáporné celé číslo k myslíme množinu všech k -prvkových podmnožin množiny M .

Definice. O grafu řekneme že je *bipartitní*, pokud jeho vrcholy můžeme rozdělit do množin A a B tak, že $\forall \{u, v\} \in E : u \in A \wedge v \in B$.

Definice. *Úplný bipartitní graf* je graf $K_{a,b}(\{1, \dots, a+b\}, \{\{u, v\} \mid u \leq a \wedge v > a\})$, kde značením $\binom{M}{k}$ pro množinu M a nezáporné celé číslo k myslíme množinu všech k -prvkových podmnožin množiny M .

Definice. *Doplňek grafu* $G(V, E)$ je graf $\overline{G}(V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Definice. *Cesta v grafu* je posloupnost $P = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, e_{n-1}, v_n)$ taková, že $\forall i \in \{1, \dots, n\} : v_i \in V, \forall i \in \{1, \dots, n-1\} : e_i \in E \wedge e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ všechna v_i jsou různá. Říkáme, že P je cesta z v_1 do v_n délky n .

Definice. Graf G je *souvislý*, pokud pro libovolné dva různé vrcholy $v_i, v_j \in V$ existuje cesta z v_i do v_j .

Definice. Graf $G'(V', E')$ je *podgraf* grafu $G(V, E)$, pokud $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ a $\forall e \in E' : e \subseteq V'$. Neformálně tedy vezmeme z G některé vrcholy a některé hrany na těch vybraných vrcholech.

Definice. Graf $G'(V', E')$ je *indukovaný podgraf* grafu $G(V, E)$, pokud $V' \subseteq V, E = \{\{v_1, v_2\} \mid \{v_1, v_2\} \in E \wedge v_1, v_2 \in V'\}$ a $\forall e \in E' : e \subseteq V'$. Neformálně tedy vezmeme z G některé vrcholy a všechny hrany na těch vybraných vrcholech. Říkáme, že G' je podgraf indukovaný množinou V' .

Definice. Mějme relaci R na vrcholech grafu G definovanou tak, že $vRu \Leftrightarrow \exists G$ existuje cesta mezi u a v . Tato relace je ekvivalence. Její třídy nazveme *komponenty souvislosti*.

Definice. Graf $G(V, E)$ a $G'(V', E')$ jsou *izomorfní*, právě když existuje bijekce $f : V \rightarrow V'$, taková, že $\{v_1, v_2\} \in E \Leftrightarrow \{f(v_1), f(v_2)\} \in E'$. f pak nazveme *izomorfismus mezi G a G'* .

Definice. *Automorfismus* je izomorfismus G sama do sebe. Automorfismu, který posílá každý vrchol sám na sebe říkáme *triviální*.

Definice. *Sousedství* vrcholu v v grafu $G(V, E)$ značíme $N(v)$ a rozumíme jím množinu vrcholů u takových, že $(u, v) \in E$

Definice. *Stupněm vrcholu* v rozumíme hodnotu $|N(v)|$ a značíme ho $\deg(v)$.

Definice. *Izolovaný vrchol* je vrchol stupně 0.

Věta (princip sudosti). Pro každý graf je $\sum_{v \in V} \deg(v)$ sudé.

Definice. *Strom* je graf, v němž mezi každými dvěma vrcholy vede právě jedna cesta.

Definice. *Kostra grafu* $G(V, E)$ je libovolný strom $G'(V, E')$ takový, že $E' \subseteq E$.

Definice. *Most* je hrana grafu taková, že jejím odstraněním zvýšíme počet komponent souvislosti grafu.

Příklad 1. Rozmyslete si, že graf má kostru, právě když je souvislý.

Příklad 2. Pro která $n \in \mathbb{N}_0$ existuje graf s právě n kostrami?

Příklad 3. Ukažte, že každý strom na alespoň 3 vrcholech, který neobsahuje vrchol stupně 2, má více listů než vnitřních vrcholů.

Příklad 4. Hranový graf grafu $G(V, E)$, který má alespoň jednu hranu, je graf $L(G)(E, E')$ tak, že $e_1 e_2 \in E' \Leftrightarrow e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$, tedy vrcholy jsou původní hrany a hrany spojují vrcholy reprezentující hrany, co měly společný vrchol. Pro jaké grafy platí, že $L(G)$ je strom? A pro jaké grafy platí, že $L(G) = G$? Najděte dva různé souvislé grafy jímž odpovídá tentýž hranový graf.

Příklad 5. Zkuste navrhnout algoritmus, který zkontroluje, zda je daná posloupnost čísel skóre nějakého grafu v lineárním čase vzhledem k počtu vrcholů a hran. *Varování: Rozmyslete si, že nejpřímochařejší způsob implementace selže a nejpřímochařejší způsob, jak toto selhání napravit, vede na příliš pomalý algoritmus.*

****Příklad 6.** Dokažte, že množina všech grafů, v nichž mezi každými dvěma vrcholy téhož stupně vede právě jedna cesta, obsahuje právě stromy a stromy na alespoň dvou vrcholech, k nimž je přidán ještě jeden izolovaný vrchol.

Příklad 7. Mějme strom G a několik (alespoň 2) jeho souvislé podgrafy $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2), \dots, G_n(V_n, E_n)$. Dokažte, že když pro každé dvě k, ℓ platí, že $V_k \cap V_\ell \neq \emptyset$, pak také

$$\bigcap_{i=1}^n V_i \neq \emptyset.$$

Ukažte, že kdyby G nemusel být strom, pak toto tvrzení neplatí.

Příklad 8. Mějme strom G na alespoň dvou vrcholech a jeho vrchol v . Dokažte, že G má alespoň $\deg(v)$ listů.

Příklad 9. Mějme strom $G(V, E)$ a nějaký jeho automorfismus f . Dokažte, že buď existuje vrchol v takový, že $f(v) = v$, nebo dva vrcholy u, v takové, že $f(u) = v$ a $f(v) = u$. *Nápověda: hledejte u a v takové, že $\{u, v\} \in E$.*