

5. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Viktor Němeček 5. 11. 2019

<https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/dm1920/>

Příklad 1. Řekneme, že číslo je *prvočíselně vypadající*, pokud je složené, ale není dělitelné 2, 3 ani 5. Tři nejmenší prvočíselně vypadající čísla jsou 49, 77 a 91. Víme, že prvočísel menších než 1000 je 168. Kolik je prvočíselně vypadajících čísel menších než 1000?

Příklad 2. Kolika způsoby lze umístit osm kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby se na šachovnici vyskytovaly čtyři kameny ve stejném řádku nebo stejném sloupci?

Příklad 3. Kolik existuje pořadí písmen A, B, D, E, I, K, M, N, R, Ů, Z takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov BAR, DEN, RAZIE?

Příklad 4. Kolika způsoby můžeme rozdělit prvky množiny $[n]$ do 5 přihrádek tak, aby po sobě jdoucí čísla byla vždy v různých přihrádkách a aby navíc žádná přihrádka nebyla prázdná?

* **Příklad 5.** Mějme mřížku $n \times n$. Začínáme v levém dolním rohu, chceme se dostat do pravého horního a smíme chodit jen po hranách mřížky, po každé nejvýše jednou. Kolika způsoby můžeme tuto cestu udělat, pokud chceme projít po právě $2n + 2$ hranách? A co když chceme použít $2n + 3$ hran?

Definice. *Grafem* G rozumíme dvojici (V, E) , kde V je neprázdná konečná množina vrcholů a E je množina neuspořádaných dvojic prvků množiny V (ne nutně všech).

Definice. *Cesta* je graf $P_n(\{1, \dots, n+1\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n, n+1\}\})$

Definice. *Kružnice* je graf $C_n(\{1, \dots, n\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\})$

Definice. *Úplný graf* je graf $K_n(\{1, \dots, n\}, \binom{V}{2})$, kde značením $\binom{M}{k}$ pro množinu M a nezáporné celé číslo k myslíme množinu všech k -prvkových podmnožin množiny M .

Definice. O grafu řekneme že je *bipartitní*, pokud jeho vrcholy můžeme rozdělit do množin A a B tak, že $\forall \{u, v\} \in E : u \in A \wedge v \in B$.

Definice. *Úplný bipartitní graf* je graf $K_{a,b}(\{1, \dots, a+b\}, \{\{u, v\} \mid u \leq a \wedge v > a\})$, kde značením $\binom{M}{k}$ pro množinu M a nezáporné celé číslo k myslíme množinu všech k -prvkových podmnožin množiny M .

Definice. *Doplňek grafu* $G(V, E)$ je graf $\overline{G}(V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Definice. *Cesta v grafu* je posloupnost $P = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, e_{n-1}, v_n)$ taková, že $\forall i \in \{1, \dots, n\} : v_i \in V, \forall i \in \{1, \dots, n-1\} : e_i \in E \wedge e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ všechna v_i jsou různá. Říkáme, že P je cesta z v_1 do v_n délky n .

Definice. Graf G je *souvislý*, pokud pro libovolné dva různé vrcholy $v_i, v_j \in V$ existuje cesta z v_i do v_j .

Definice. Graf $G'(V', E')$ je *podgraf* grafu $G(V, E)$, pokud $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ a $\forall e \in E' : e \subseteq V'$. Neformálně tedy vezmeme z G některé vrcholy a některé hrany na těch vybraných vrcholech.

Definice. Graf $G'(V', E')$ je *indukovaný podgraf* grafu $G(V, E)$, pokud $V' \subseteq V, E' = \{\{v_1, v_2\} \mid \{v_1, v_2\} \in E \wedge v_1, v_2 \in V'\}$ a $\forall e \in E' : e \subseteq V'$. Neformálně tedy vezmeme z G některé vrcholy a všechny hrany na těch vybraných vrcholech. Říkáme, že G' je podgraf indukovaný množinou V' .

Definice. Mějme relaci R na vrcholech grafu G definovanou tak, že $vRu \Leftrightarrow \exists G$ existuje cesta mezi u a v . Tato relace je ekvivalence. Její třídy nazveme *komponenty souvislosti*.

Definice. Graf $G(V, E)$ a $G'(V', E')$ jsou *izomorfní*, právě když existuje bijekce $f : V \rightarrow V'$, taková, že $\{v_1, v_2\} \in E \Leftrightarrow \{f(v_1), f(v_2)\} \in E'$. f pak nazveme *izomorfismus mezi G a G'* .

Definice. *Automorfismus* je izomorfismus G sama do sebe. Automorfismu, který posílá každý vrchol sám na sebe říkáme *triviální*.

Definice. *Sousedství* vrcholu v v grafu $G(V, E)$ značíme $N(v)$ a rozumíme jím množinu vrcholů u takových, že $(u, v) \in E$

Definice. *Stupněm vrcholu v* rozumíme hodnotu $|N(v)|$ a značíme ho $\deg(v)$.

Definice. *Izolovaný vrchol* je vrchol stupně 0.

Věta (princip sudosti). Pro každý graf je $\sum_{v \in V} \deg(v)$ sudé.

Definice. *Komponenta souvislosti* K v grafu $G(V, E)$ je neprázdná podmnožina V taková, že podgraf indukovaný množinou K je souvislý, ale žádný podgraf indukovaný množinou $K' \supset K$ souvislý není.

Příklad 6. Rozmyslete si, že pro každý graf $G(V, E)$ je definice komponenty souvislosti korektní, tedy že v ní zmíněná relace R je skutečně ekvivalence.

Příklad 7. Mějme graf G na patnácti vrcholech takový, že pro každý vrchol v je $\deg(v) \geq 7$. Dokažte, že G je souvislý.

Příklad 8. Najděte graf, který má co nejméně vrcholů, nejméně však dva, a nemá netriviální automorfismus.

* **Příklad 9.** Pro každé přirozené n najděte graf, který má právě n automorfismů.

Příklad 10. Ukažte, že každý graf G , jenž má minimální stupeň $\delta(G) \geq d$, obsahuje cestu P_d jako podgraf.

Příklad 11. Mějme daná 3 přirozená čísla větší než 2 k, m, n . Určete, kolik různých kružnic C_k lze najít jako podgrafy v grafech K_n a $K_{m,n}$.