

7. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Viktor Němeček 3. 12. 2019

<https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/dm1920/>

Definice. *Grafem* G rozumíme dvojici (V, E) , kde V je neprázdná konečná množina vrcholů a E je množina neuspořádaných dvojic prvků množiny V (ne nutně všech).

Definice. *Cesta* je graf $P_n(\{1, \dots, n+1\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n, n+1\}\})$

Definice. *Kružnice* je graf $C_n(\{1, \dots, n\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\})$

Definice. *Úplný graf* je graf $K_n(\{1, \dots, n\}, \binom{V}{2})$, kde značením $\binom{M}{k}$ pro množinu M a nezáporné celé číslo k myslíme množinu všech k -prvkových podmnožin množiny M .

Definice. O grafu řekneme že je *bipartitní*, pokud jeho vrcholy můžeme rozdělit do množin A a B tak, že $\forall \{u, v\} \in E : u \in A \wedge v \in B$.

Definice. *Úplný bipartitní graf* je graf $K_{a,b}(\{1, \dots, a+b\}, \{\{u, v\} \mid u \leq a \wedge v > a\})$, kde značením $\binom{M}{k}$ pro množinu M a nezáporné celé číslo k myslíme množinu všech k -prvkových podmnožin množiny M .

Definice. *Doplňěk grafu* $G(V, E)$ je graf $\overline{G}(V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Definice. *Cesta v grafu* je posloupnost $P = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, e_{n-1}, v_n)$ taková, že $\forall i \in \{1, \dots, n\} : v_i \in V, \forall i \in \{1, \dots, n-1\} : e_i \in E \wedge e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ všechna v_i jsou různá. Říkáme, že P je cesta z v_1 do v_n délky n .

Definice. Graf G je *souvislý*, pokud pro libovolné dva různé vrcholy $v_i, v_j \in V$ existuje cesta z v_i do v_j .

Definice. Graf $G'(V', E')$ je *podgraf* grafu $G(V, E)$, pokud $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ a $\forall e \in E' : e \subseteq V'$. Neformálně tedy vezmeme z G některé vrcholy a některé hrany na těch vybraných vrcholech.

Definice. Graf $G'(V', E')$ je *indukovaný podgraf* grafu $G(V, E)$, pokud $V' \subseteq V, E = \{\{v_1, v_2\} \mid \{v_1, v_2\} \in E \wedge v_1, v_2 \in V'\}$ a $\forall e \in E' : e \subseteq V'$. Neformálně tedy vezmeme z G některé vrcholy a všechny hrany na těch vybraných vrcholech. Říkáme, že G' je podgraf indukovaný množinou V' .

Definice. Mějme relaci R na vrcholech grafu G definovanou tak, že $vRu \Leftrightarrow \exists G$ existuje cesta mezi u a v . Tato relace je ekvivalence. Její třídy nazveme *komponenty souvislosti*.

Definice. Graf $G(V, E)$ a $G'(V', E')$ jsou *izomorfní*, právě když existuje bijekce $f : V \rightarrow V'$, taková, že $\{v_1, v_2\} \in E \Leftrightarrow \{f(v_1), f(v_2)\} \in E'$. f pak nazveme *izomorfismus mezi G a G'* .

Definice. *Automorfismus* je izomorfismus G sama do sebe. Automorfismu, který posílá každý vrchol sám na sebe říkáme *triviální*.

Definice. *Sousedství* vrcholu v v grafu $G(V, E)$ značíme $N(v)$ a rozumíme jím množinu vrcholů u takových, že $(u, v) \in E$

Definice. *Stupněm vrcholu* v rozumíme hodnotu $|N(v)|$ a značíme ho $\deg(v)$.

Definice. *Izolovaný vrchol* je vrchol stupně 0.

Věta (princip sudosti). Pro každý graf je $\sum_{v \in V} \deg(v)$ sudé.

Definice. *Strom* je graf, v němž mezi každými dvěma vrcholy vede právě jedna cesta.

Definice. *Kostra grafu* $G(V, E)$ je libovolný strom $G'(V, E')$ takový, že $E' \subseteq E$.

Definice. *Most* je hrana grafu taková, že jejím odstraněním zvýšíme počet komponent souvislosti grafu.

Příklad 1. Rozmyslete si, že pro každou kostru $K(V, E')$ grafu $G(V, E)$ a každou hranu $e \in E \setminus E'$ existují alespoň 2 různé hrany e', e'' , takové že $K'(V, E' / \text{setminus} \{e'\} \cup \{e\})$ i $K''(V, E' / \text{setminus} \{e''\} \cup \{e\})$ jsou kostry G .

Příklad 2. Nechť m, n a k jsou přirozená čísla taková, aby příslušná zadání dávala smysl. Určete počet různých koster následujících grafů: *Pozor, různé kostry skutečně musí být různé, ale nevadí, když jsou izomorfní.*

- Strom na n vrcholech.
- Graf obsahující 2 vrcholy u a v , které jsou spojené třemi různými cestami délek m, n a k .
- Úplný bipartitní graf $K_{n,2}$.
- Úplný bipartitní graf $K_{n,3}$.

Definice. Mějme graf $G(V, E)$ a přirozené číslo k . G^k budeme značit graf G' na vrcholech V takový, že u a v jsou spojeny hranou, pokud je vzdálenost u a v nejvýše k .

Definice. *Hamiltonovská kružnice* grafu G je kružnice, která je podgrafem tohoto grafu, a prochází přes všechny jeho vrcholy.

Tvrzení. Rozhodnout, zda má daný graf Hamiltonovskou kružnici je NP-těžké.

Příklad 3. Dokažte, že pro každý souvislý graf G má G^3 Hamiltonovskou kružnici. Najděte graf H takový, že H^2 Hamiltonovskou kružnici mít nebude.

****Příklad 4.** Na šachovnici $n \times n$ je označeno $2n$ políček. Dokažte, že na ni jde umístit šachovou věž tak, aby se donekonečna mohla pohybovat pouze po označených polích tak, že střídá vertikální a horizontální pohyby.

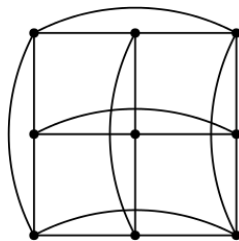
Definice. *Eulerovský tah* je tah v grafu, který obsahuje každou hranu grafu právě jednou.

Definice. Graf je *Eulerovský*, právě když v něm existuje eulerovský tah.

Věta. Graf je eulerovský, právě když má po odstranění izolovaných vrcholů nejvýše jednu komponentu a všechny vrcholy mají sudý stupeň.

Příklad 5. U následujících grafů rozhodněte, zda jsou eulerovské:

a) Graf z obrázku.



b) Pro množinu $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ graf $G_1(2^M, \{(a, b) \mid a \cup b = \emptyset\})$, případně jeho doplněk.

c) G_2 , pokud víme, že G_2 je souvislý, má lichý počet vrcholů a $\overline{G_2}$ je eulerovský.

Příklad 6. Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejíž odebrání zvýší počet komponent souvislosti.

Příklad 7. Hranový graf grafu $G(V, E)$, který má alespoň jednu hranu, je graf $L(G)(E, E')$ tak, že $e_1 e_2 \in E' \Leftrightarrow e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$, tedy vrcholy jsou původní hrany a hrany spojují vrcholy reprezentující hrany, co měly společný vrchol. Dokažte, že hranový graf eulerovského grafu je eulerovský.

Příklad 8. Dokažte, že každý eulerovský graf lze rozložit na hranově disjunkttní sjednocení kružnic (tj. rozložit na kružnice tak, že žádné dvě nesdílí hrany). Je tento rozklad, nebo alespoň počet kružnic v něm jednoznačný?

*** Příklad 9.** k -regulární graf je graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň k . Dokažte, že každý $2k$ -regulární graf lze rozložit na hranově disjunkttní sjednocení dvou k -regulárních grafů.