

2. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Viktor Němeček 8. 10. 2019

<https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/dm1920/>

Dnes se podíváme na důkazy sporem a jejich speciální případ, důkaz metodou nejmenšího protipříkladu. Některé z následujících příkladů jsou však spíše odstrašující – možná si všimnete, že ač lze důkaz téměř vždy zformulovat pomocí sporu (a často se na něj tak lépe přichází), je přímý důkaz kratší, elegantnější a z důkazu sporem snadno vyrobitelný.

Příklad 1. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.

Příklad 2. Kolem kulatého stolu sedí 22 dětí, 11 kluků a 11 holek. Dokažte, že alespoň jedno dítě (ne nutně kluk) má po obou svých stranách holky.

Příklad 3. Dokažte, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo. *Hint: Začněte tím, že si pořádně připomenete definici racionálního čísla.* Dokážete dokázat obecnější verzi, která říká, že každá (přirozená) odmocnina (přirozeného) čísla je buď přirozená, nebo iracionální?

Příklad 4. Nalezněte všechna celočíselná¹ řešení následující rovnice:

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$$

****Příklad 5.** Mějme přirozená čísla x , y a z po dvou nesoudělná taková, že $x^2 + y^2 = z^2$. Pak tato čísla nazveme *primitivní Pythagorejskou trojicí*. Pro takové trojice platí, že existují přirozená čísla p a q taková, že $x = 2pq$, $y = p^2 - q^2$ a $z = p^2 + q^2$, kde p a q jsou nesoudělná čísla, z nichž je navíc právě jedno sudé. Dokažte s využitím tohoto tvrzení, že neexistují žádná přirozená čísla a , b , c taková, že $a^4 + b^4 = c^4$.

Příklad 6. Lesník si vysázel nekonečnou lesní školku, a to tak, že v rovině vysadil strom do každého bodu s celočíselnými souřadnicemi. Tuto školku nechal několik let růst. Při následné procházce zjistil, že jeho školka je skutečně obdivuhodná – nejen, že má každý strom v centimetrech celočíselnou výšku, ale navíc je každý strom stejně vysoký, jako průměr jeho čtyř sousedů. Dokažte, že ve zmíněné lesní školce jsou všechny stromy stejně vysoké.

Příklad 7. František si nakreslil do sešitu několik modrých bodů a několik červených bodů, přičemž žádné dva nakreslené body nesplývají. Pak si všiml, že na úsečce spojující libovolné dva různé modré je alespoň jeden červený, a naopak na úsečce spojující libovolné dva různé červené je alespoň jeden modrý. Ukažte, že je bodů buď nekonečně mnoho, nebo leží všechny na jedné přímce. *Hint: Podívejte se na obsahy trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech.*

Příklad 8. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $F_n \leq 1.7^n$. F_n je n -tý prvek Fibonacciho posloupnosti, která je definovaná tak, že $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Příklad 9. Dokažte, že každé přirozené číslo krom jedničky lze rozložit na součin² prvočinitelů. Definice složeného čísla zní, že číslo n je složené, pokud existují a a b takové, že $a \cdot b = n$, a přitom ani jedno z nich se nerovná ani n ani jedné.

****Příklad 10.** Mějme množinu bodů v rovině takovou, že žádné 3 neleží na jedné přímce. Dokažte, že tvoří-li nějakých 6 z nich konvexní šestiúhelník, pak nutně nějakých 5 z nich tvoří konvexní pětiúhelník, v němž již neleží žádné další vybrané body. *Hint: Hledejte šestiúhelník, v němž leží nejméně dalších vybraných bodů.*

Příklad 11. Ukažte, že pro každé x mezi 0 a $\pi/2$ platí, že $\sin x + \cos x \geq 1$.

Příklad 12. Rozhodněte, zda lze vydláždit šachovnici 10×10 T-tetrominy (kostička složená ze 4 čtverečků ve tvaru písmene T).

¹Tj. taková, že a , b , c i d jsou celá čísla.

²Ne nutně více než jednoho činitele