

4. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Viktor Němeček 22. 10. 2019

<https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/dm1920/>

Definice. Mějme množinu X , relaci R na ní a množinu Y a relaci S na ní. O R a S řekneme že jsou *izomorfní* právě když existuje bijekce $f : X \rightarrow Y$ taková, že $aRb \Leftrightarrow f(a)Sf(b)$. Jinými slovy lze říct, že R a S jsou izomorfní, když lze R na S převést pouze přejmenováním prvků, na kterých žije.

Definice. Mějme množinu X s částečným uspořádáním $\prec$. Pak *řetězec* R je libovolná podmnožina množiny X taková, že libovolné dva její prvky jsou porovnatelné. *Antiřetězec* S je pak naopak libovolná podmnožina množiny X taková, že žádné dva její (různé) prvky nejsou porovnatelné. U řetězce i antiřetězce je možné mluvit o jeho *délce*, pak se jedná o počet jeho prvků.

Příklad 1. Ukažte, že všechna lineární uspořádání na dané konečné množině jsou izomorfní. Všimněte si, že pro částečná uspořádání již toto tvrzení neplatí.

Příklad 2. Jak dlouhý je nejdelší řetězec a antiřetězec v relaci $(\mathcal{P}(\{1, \dots, n\}), \subseteq)$?

Příklad 3. O následujících relacích na $\mathbb{N}^2$ rozhodněte, zda jsou částečné uspořádání. Které z nich jsou také lineárními uspořádáními?

a) $(a, b) \preceq_a (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \leq y$

b) $(a, b) \preceq_b (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \vee b \leq y$

c) $(a, b) \preceq_c (x, y) \Leftrightarrow a < x \vee (a = x \wedge b \leq y)$ (tzv. lexikografické uspořádání)

d) $(a, b) \preceq_d (x, y) \Leftrightarrow \max(a, b) > \max(x, y) \vee (\max(a, b) = \max(x, y) \wedge \min(a, b) \leq \min(x, y))$

e) $(a, b) \preceq_e (x, y) \Leftrightarrow \max(a, b) > \max(x, y) \vee (\max(a, b) = \max(x, y) \wedge (a, b) \preceq_c (x, y))$

Příklad 4. Na vhodné (ne nutně vždy stejné; ne nutně konečné) množině najděte částečné uspořádání, které bude mít:

- a) Žádný maximální nebo minimální prvek.
- b) Alespoň jeden maximální prvek, ale žádný největší.
- c) Právě jeden maximální prvek, ale žádný největší.
- d) Nekonečno maximálních prvků, ale pouze konečno minimálních.

Příklad 5. Mějme částečně uspořádanou množinu o n prvcích. Nechť r je délka jejího nejdelšího řetězce a a délka nejdelšího antiřetězce. Z věty o dlouhém a širokém víme, že $r \cdot s$ je alespoň n . Umíte pro $r \cdot s$ pouze ze znalosti n určit i nějakou horní mez?

****Příklad 6.** Najděte co nejvíce vzájemně neizomorfních uspořádání na $\mathbb{N}$. Poradím, že jich existuje dokonce ne-spočetně mnoho (stejně jako reálných čísel).

Definice. Symbolem $[n]$ budeme značit množinu $\{1, 2, \dots, n\}$.

Příklad 7. Dokažte, že pro každé $n \geq 1$ má množina $[n]$ stejně podmnožin sudé velikosti, jako podmnožin liché velikosti.

Příklad 8. Určete počet rozdělení množiny $[n]$ do příhrádek $A, \dots, E$, tak aby žádná dvě za sebou jdoucí čísla nebyla ve společné příhradce.

Příklad 9. Sečtěte:

a) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$

****Příklad 10.** Husté lineární uspořádání (běžně označováno *DeLO* z anglického *Dense Linear Ordering*) je uspořádání takové, že libovolné dva prvky jsou porovnatelné a mezi libovolnými dvěma prvky je ještě další prvek. Příkladem takového uspořádání je například $\mathbb{Q}$ s běžným uspořádáním. Dá se dokázat, že libovolná dvě spočetné DeLO jsou izomorfní, pokud se shodují v tom, zda mají nebo nemají největší a nejmenší prvek, ale pro „větší“ množiny už to obecně platit nemusí. Rozmyslete si, že lexikograficky uspořádané $\{0, 1\} \times \mathbb{Q}$ je izomorfní $\mathbb{Q}$, ale $\{0, 1\} \times \mathbb{R}$ není izomorfní $\mathbb{R}$.