6. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Viktor Němeček 27. 11. 2018

https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/dm1819/

Definice. *Grafem* G rozumíme dvojici (V, E), kde V je konečná množina vrcholů a E je množina neuspořádaných dvojic prvků množiny V (ne nutně všech).

Poznámka. Některé definice grafu požadují neprázdnost množiny V. Neprázdnost E obecně vyžadována není.

Definice. *Cesta* je graf $P_n(\{1, \dots, n\}, \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\})$

Poznámka. Některé definice neměří délku cesty počtem vrcholů ale počtem hran.

Definice. *Kružnice* je graf $C_n(\{1, \dots, n\}, \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)\})$

Definice. *Úplný graf* je graf $K_n(\{1, \dots, n\}, \binom{V}{2})$, kde značením $\binom{M}{k}$ pro množinu M a nezáporné celé číslo k myslíme množinu všech k-prvkových podmnožin množiny M.

Definice. O grafu řekneme že je *bipartitní*, pokud jeho vrcholy můžeme rozdělit do množin A a B tak, že $\forall (u, v) \in E : u \in A \wedge v \in B$.

Definice. *Úplný* bipartitní graf je graf $K_{a,b}(\{1, \dots, a+b\}, \{(u, v) \mid u \leq a \wedge v > a\})$.

Definice. *Doplněk grafu* $G(V, E)$ je graf $\overline{G}(V, \binom{V}{2} \setminus E)$

Definice. *Cesta v grafu* je posloupnost $P = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, e_{n-1}, v_n)$ taková, že $\forall i \in \{1, \dots, n\} : v_i \in V, \forall i \in \{1, \dots, n-1\} : e_i \in E \wedge e_i = (v_i, v_{i+1})$ a všechna v_i jsou různá. Říkáme, že P je cesta z v_1 do v_n délky n *(viz poznámku u cesty)*.

Definice. Graf G je *souvislý*, pokud pro libovolné dva různé vrcholy $v_i, v_j \in V$ existuje cesta z v_i do v_j.

Definice. Graf $G'(V', E')$ je *podgraf* grafu $G(V, E)$, pokud $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ a $\forall e \in E' : e \subseteq V'$. Neformálně tedy vezmeme z G některé vrcholy a některé hrany na těch vybraných vrcholech.

Definice. Graf $G'(V', E')$ je *indukovaný podgraf* grafu $G(V, E)$, pokud $V' \subseteq V$ a $E = \{(v_1, v_2) \mid (v_1, v_2) \in E \wedge v_1, v_2 \in V'\}$. Neformálně tedy vezmeme z G některé vrcholy a všechny hrany na těch vybraných vrcholech. Říkáme, že G' je podgraf indukovaný množinou V'.

Definice. *Komponenta souvislosti* K v grafu $G(V, E)$ je neprázdná podmnožina V taková, že podgraf indukovaný množinou K je souvislý, ale žádný podgraf indukovaný množinou $K' \supset K$ souvislý není.

Definice. Graf $G(V, E)$ a $G'(V', E')$ jsou izomorfní, právě když existuje bijekce $f : V \to V'$, taková, že $(v_1, v_2) \in E \Leftrightarrow (f(v_1), f(v_2)) \in E'$. f pak nazveme *izomorfismus mezi* G *a* G'.

Definice. *Automorfismus* je izomorfismus G sama do sebe. Automorfismu, který posílá každý vrchol sám na sebe, říkáme *triviální*.

Definice. *Sousedství* vrcholu v v grafu $G(V, E)$ značíme $N(v)$ a rozumíme jím množinu vrcholů u takových, že $(u, v) \in E$

Definice. *Stupněm vrcholu* v rozumíme hodnotu $|N(v)|$ a značíme ho $deg(v)$.

Definice. *Skóre grafu* je posloupnost $(deg(v_1), deg(v_2), \dots, deg(v_n))$ uspořádaná vzestupně podle velikosti.

Definice. *Izolovaný vrchol* je vrchol stupně 0.

Věta (princip sudosti). Pro každý graf je $\sum_{v \in V} deg(v)$ sudé.

Příklad 1. Rozmyslete si, že pro každý graf $G(V, E)$ je „Patřit do téže komponenty souvislosti“ ekvivalencí na V.

Příklad 2. Rozhodněte, zda pro každý graf G jsou tvrzení „G je souvislý“ a „G má právě jednu komponentu souvislosti“ ekvivalentní.

Příklad 3. Mějme graf G na patnácti vrcholech takový, že pro každý vrchol v je $deg(v) \geq 7$. Dokažte, že G je souvislý.

Příklad 4. Najděte graf, který má co nejméně vrcholů, nejméně však dva, a nemá netriviální automorfismus.

∗ **Příklad 5.** Pro každé přirozené n najděte graf, který má právě n automorfismů.

Příklad 6. Ukažte, že každý graf G, jenž má minimální stupeň $\delta(G) \geq d$, obsahuje cestu P_d jako podgraf.

Příklad 7. Mějme daná 3 přirozená čísla větší než 2 k, m, n. Určete, kolik různých kružnic C_k lze najít jako podgrafy v grafech K_n a $K_{m,n}$.

Příklad 8. Rozhodněte, zda existuje graf, jehož skóre je

a) $2, 2, 2, 2, 2, 2$

b) $3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$

c) $3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$

d) $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Příklad 9. Najděte nejmenší možný příklad (s co nejmenším počtem vrcholů) dvou souvislých neizomorfních grafů se stejným skóre.