7. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Viktor Němeček 4. 12. 2018

https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/dm1819/

Definice. *Tah* v grafu je posloupnost $(v_1, e_1, v_2, \ldots, e_{n-1}, v_n)$ taková, že pro všechna i z příslušných rozsahů jsou $v_i \in V, e_i \in E, e_i = (v_i, v_{i+1})$ a všechna e_i jsou různá. v_i však různá být nemusejí.

Definice. *Eulerovský tah* je tah v grafu, který obsahuje každou hranu grafu právě jednou.

Definice. Graf je *Eulerovský*, právě když v něm existuje eulerovský tah.

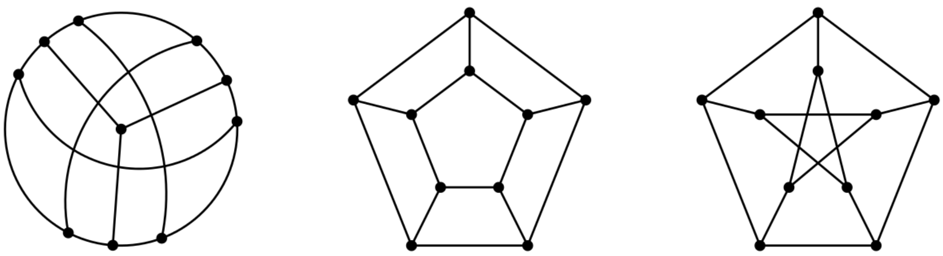
Věta. Graf je eulerovský, právě když je po odstranění izolovaných vrcholů nejvýše jednu komponentu a všechny vrcholy mají sudý stupeň.

Definice. *Strom* je souvislý graf bez kružnice.

Definice. *Les* je graf bez kružnice.

Příklad 1. Dokažte, že pokud k a n jsou přirozená čísla, alespoň jedno z nich je sudé a $k < n$, pak existuje graf s n vrcholy a všemi stupni rovnými k.

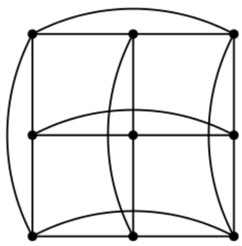
Příklad 2. U následujících tří grafů rozhodněte, zda je nějaká dvojice izomorfní:



Dále rozhodněte, zda je nějaký z nich izomorfní grafu, jehož vrcholy jsou právě všechny neuspořádané dvojice prvků pětiprvkové množiny a hrany vedou právě mezi dvojicemi s prázdným průnikem.

Příklad 3. U následujících grafů rozhodněte, zda jsou eulerovské:

a) Graf z obrázku. U tohoto grafu zkuste eulerovský tah i najít.



b) Pro množinu $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ graf $G_1(2^M, \{(a, b) \mid a \cup b = \emptyset\}$, případně jeho doplněk.

c) G_2, pokud víme, že G_2 je souvislý, má lichý počet vrcholů a $\overline{G_2}$ je eulerovský.

Příklad 4. Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejíž odebrání zvýší počet komponent souvislosti.

Příklad 5. Dokažte, že pro každý strom existuje očíslování vrcholů takové, že všechny vrcholy krom jednoho mají právě jednoho souseda s nižším číslem, než ony samy.

Příklad 6. Dokažte, že každý strom s vrcholem stupně d má alespoň d listů.

Příklad 7. Dokažte, že každý graf s m hranami má bipartitní podgraf s alespoň $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ hranami.

Příklad 8. Dokažte, že doplněk nesouvislého grafu je souvislý.