1. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Viktor Němeček 2. 10. 2018

https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/dm1819/

Dnešní cvičení je před první přednáškou. Není možné cvičit věci, které teprve proberete, proto dnes nebudou příklady zcela „diskrétkové“, ale obecně na procvičení matematického myšlení a matematické indukce.

Značení. Značením

$$\sum_{i=m}^{n} f(i),$$

kde m a n jsou celá čísla, myslíme součet $f(i)$ pro všechna celá i od m do n včetně. Tedy

$$\sum_{i=5}^{8}(i^2+1) = (5^2+1)+(6^2+1)+(7^2+1)+(8^2+1).$$

Pokud $n < m$, jedná se o součet přes prázdnou množinu, jehož hodnotu nadefinujeme jako 0. Někdy též místo symbolu $\sum$ použijeme symbol $\prod$, pak jednotlivé hodnoty nesčítáme ale násobíme. Součin přes prázdnou množinu je roven 1.

Příklady na procvičení matematické indukce

Příklad 1. Pro všechna přirozená n dokažte rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

Řešení. K řešení použijeme matematickou indukci.

Pro $i = 1$ dostáváme $1 = 1$, což platí.

Nyní mějme tvrzení dokázáno pro všechna $n \leq m$ a ukažme, že platí i pro $n = m+1$. Z rovnosti v zadání pro $n = m+1$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m+1} i^3 &= \left(\sum_{i=1}^{m+1} i\right)^2 \\
\sum_{i=1}^{m} i^3 + (m+1)^3 &= \left(\sum_{i=1}^{m} i + m + 1\right)^2 \\
\sum_{i=1}^{m} i^3 + (m+1)^3 &= \left(\sum_{i=1}^{m} i\right)^2 + 2(m+1)\sum_{i=1}^{m} i + (m+1)^2
\end{aligned}$$

Nyní můžeme využít indukčního předpokladu – víme, nejlevější sčítance na obou stranách rovnice jsou si rovny, můžeme je tedy oba odečíst.

$$
\begin{aligned}
(m+1)^3 &= 2(m+1)\sum_{i=1}^{m} i + (m+1)^2 \\
(m+1)^2 &= 2\sum_{i=1}^{m} i + (m+1) \\
(m+1)^2 - (m+1) &= 2\sum_{i=1}^{m} i \\
(m+1)((m+1)-1) &= 2\sum_{i=1}^{m} i \\
\frac{(m+1)m}{2} &= \sum_{i=1}^{m} i
\end{aligned}
$$

Rovnost, ke které jsme se dostali, paltí například proto, že když v součtu na pravé straně spárujeme první a poslední sčítanec, poté druhý a předposlední a tak dále, dostaneme právě $\frac{m}{2}$ právě $m+1$ velkých sčítanců. Kdybychom však na myšlenku s párováním nepřišli, mohli bychom tento vzorec znovu zkoušet dokazovat indukcí.

Na závěr je dobré podotknout, že v našem důkaze by se mohlo zdát, že jsme tvrzení nedokázali – začali jsem s dokazovaným tvrzením, a nakonec jsme se dobrali pravdivého tvrzení. V důkazech je však nutné používat opačný postup – začít s pravdivým tvrzením a dobrat se dokazovaného tvrzení. Můžeme si ale všimnout, že všechny použité úpravy lze provést i opačným směrem a budou stále korektní.

Příklad 2. Mějme nenulové reálné číslo x. Dokažte, že pokud $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo, pak $x^n + \frac{1}{x^n}$ je celé číslo pro každé přirozené číslo n

Příklad 3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je $n^5 - n$ dělitelné pěti (nula je dělitelná všemi přirozenými čísly).

* **Příklad 4.** Bylo jedno mafiánské městečko a tam žila veliká spousta mafiánů. Mafiáni měli manželky a bohužel ne všechny manželky byly svým manželům věrné. Žádný z mafiánů však o své manželce neví, zda je mu věrná či ne. Na druhou stranu ví všechno ostatní, tedy i o ostatních mafiánech a věrnosti jejich manželek.

Jednoho dne byla oslava, kde se jeden svobodný mafián opil a přede všemi prohlásil: „V tomhle městě je alespoň jedna nevěrná manželka“. Uběhlo 42 dní a všechny nevěrné manželky byly najednou v poledne oběšeny na náměstí. Kolik jich bylo a jak k tomu přesně došlo? Mafián nemá jinou možnost jak zjistit, zda je jeho manželka nevěrná, než pomocí vlastního logického uvažování – nikdo mu to nemůže říct. Uvažování mafiánů funguje po dnech. Pokud kterýkoliv mafián zjistí, že jeho manželka je nevěrná, následujícího dne ji na náměstí veřejně popraví (tedy všichni mafiáni se o tom dozvědí). Na druhou stranu nikdy nepopraví manželku, pokud si není absolutně jistý, že je mu nevěrná. Všichni mafiáni uvažují naprosto identicky a vědí to o sobě.

Příklad 5. V rovině je nakresleno $n \in \mathbb{N}_0$ přímek tak, že žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Dokažte, že je jimi rovina rozdělena právě na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ částí.

* **Příklad 6.** V prostoru je n rovin tak, že žádné čtyři neprochází tímž bodem, ale libovolné tři mají právě jeden společný bod. Na kolik částí prostor dělí?

Příklad 7. Dokažte, že každý komvexní $3n$-úhelník lze rozdělit neprotínajícími se úhlopříčkami na trojúhelníky tak, že v každém vrcholu končí sudý počet těchto úhlopříček.

Další příklady

Příklad 8. Kolejní topinkovač opeče chleba z jedné strany za 5 minut a vejdou se na něj současně 2 chleby. Je možné s jeho pomocí opéci 3 chleby během 15 minut?

Příklad 9. Tabulku čokolády o $m \times n$ dílcích chceme rozlámat na jednotlivé dílky. Kolik nejméně rozlomení potřebujeme? A kolik nejvíce?

* **Příklad 10.** Na špejli o délce 20 cm je několik mravenců. Každý se pohybuje rychlostí 1 centimetr za vteřinu nějakým směrem. Mravenec, který dojde na konec špejle spadne ze špejle na zem. Když se dva mravenci potkají, každý z nich se otočí a pokračuje opačným směrem. Za jakou nejkratší dobu již na špejli jistě nebudou žádní mravenci?

Příklad 11. V tajuplném sklepení stojí 3 pytle. V jednom jsou červené míčky, v druhém modré míčky, ve třetím směs modrých a červených míčků. Jednou si někdo dal tu práci, aby každý pytel označil cedulkou popisující, co je uvnitř. A podruhé si někdo jiný dal tu práci, aby cedulky proházel tak, že ani jedna nesouhlasí. Ve sklepě je tma, ale můžeme vytáhnout jednu věc z pytle podle našeho výběru a jít se na ni pořádně podívat ven. Jak zjistit, který pytel je který pomocí co nejméně cest ven?

Příklad 12. Kolika způsoby umíme vybrat množiny $A, B \subseteq \{1, \ldots, n\}$, pro které platí:

1. $A \subseteq B$
2. $A = x$ a $x \in B$
3. $|A \cap B| = 1$

* **Příklad 13.** Kolik je neklesajících zobrazení $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$? Kolik takových zobrazení je monotónních?

Příklad 14. Opět lámání čokolády, tentokrát pro dva hráče. Hráči se pravidelně střídají v tazích. Ten, který je zrovna na tahu, si vybere jednu z částí čokolády a libovolně ji rozlomí, pouze je zakázáno odlamovat kousky 1×1. Kdo nemůže udělat tah, prohrál. Rozhodněte, kdo má vyhrávající strategii:

1. Pokud je alespoň jeden rozměr čokolády sudý.
2. **Pokud jsou oba rozměry čokolády liché.