

5. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Viktor Němeček 20. 11. 2018

<https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/dm1819/>

Příklad 1. Sečtěte:

a) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$

c) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$

Příklad 2. Dokažte výpočtem i kombinatorickou úvahou:

a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

b) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

* c) $\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

Příklad 3. Ukažte, že $(k!)^n$ dělí $(kn)!$.

Příklad 4. Řekneme, že číslo je *prvočíselně vypadající*, pokud je složené ale není dělitelné 2, 3 ani 5. Tři nejmenší prvočíselně vypadající čísla jsou 49, 77 a 91. Víme, že prvočísel menších než 1000 je 168. Kolik je prvočíselně vypadajících čísel menších než 1000?

Příklad 5. Kolika způsoby lze umístit osm kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby se na šachovnici vyskytovaly čtyři kameny ve stejném řádku nebo stejném sloupci?

Příklad 6. Kolik existuje pořadí písmen A, B, D, E, I, K, M, N, R, Ů, Z takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov BAR, DEN, RAZIE? Co když zakážeme i KAZ?

* **Příklad 7.** Mějme mřížku $n \times n$. Začínáme v levém dolním rohu, chceme se dostat do pravého horního a smíme chodit jen po hranách mřížky, po každé nejvýše jednou. Kolika způsoby můžeme tuto cestu udělat, pokud chceme projít po právě $2n + 2$ hranách? A co když chceme použít $2n + 3$ hran?

** **Příklad 8.** Husté lineární uspořádání (běžně označováno *DeLO* z anglického *Dense Linear Ordering*) je uspořádání takové, že libovolné dva prvky jsou porovnatelné a mezi libovolnými dvěma prvky je ještě další prvek. Příkladem takového uspořádání je například \mathbb{Q} s běžným uspořádáním. Dá se dokázat, že libovolná dvě spočetná DeLO jsou izomorfní, pokud se shodují v tom, zda mají nebo nemají nejvyšší a nejmenší prvek, ale pro „větší“ množiny už to obecně platit nemusí. Rozmyslete si, že lexikograficky uspořádané $\{0, 1\} \times \mathbb{Q}$ je izomorfní \mathbb{Q} , ale $\{0, 1\} \times \mathbb{R}$ není izomorfní \mathbb{R} .