

8. DÚ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Deadline 11. 12. 2018 15:40

<https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/dm1819/>

Na příštím cvičení bude písemka!

Příklad 1. Najděte graf G takový, že G i \overline{G} jsou souvislé.

(1 bod)

Příklad 2. Ukažte, že v každém souvislém grafu s alespoň jednou hranou existuje sled, který každou hranu projde právě dvakrát.

(3 body)

Příklad 3. Ukažte, že každý strom má nezávislou množinu (tj. indukovaný podgraf bez hran) s alespoň $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vrcholy, kde n je počet vrcholů původního stromu.

(3 body)

Bonusové příklady

Započítávají se, pouze pokud máte z ostatních příkladů alespoň 68 bodů. Deadline mají na konci zkouškového.

Příklad 4. Mějme strom S s alespoň dvěma vrcholy, který neobsahuje vrchol stupně 2. Ukažte, že má víc listů než vnitřních vrcholů.

(3 body)

Příklad 5. Ukažte, že v každém souvislém grafu $G(V, E)$ na alespoň 3 vrcholech existují vrcholy u a v takové, že všechny 3 podgrafy indukované množinami $V \setminus \{u\}$, $V \setminus \{v\}$ i $V \setminus \{u, v\}$, jsou souvislé.

(2 body)

Definice. *Matice sousednosti* M grafu $G(V, E)$ je $\{0, 1\}$ matice velikosti $|V| \times |V|$, která má na pozici a_{ij} jedničku právě tehdy, když je v grafu hrana z vrcholu i do vrcholu j .

Definice. Nechť A je matice $n \times n$. Pak $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ (n -krát), kde \cdot je standardní maticový součin.

Příklad 6. Mějme graf G na n vrcholech, jeho matici sousednosti A a jednotkovou matici velikosti n I_n . Dokažte, že G je souvislý, právě když existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $(A + I_n)^m$ neobsahuje žádnou nulu.

(4 body)