8. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Viktor Němeček 18. 12. 2018

https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/dm1819/

Definice. *Kostra* grafu $G(V, E)$ je strom $G'(V, E')$ takový, že $E' \subseteq E$.

Pozorování. Graf má kostru, právě když je souvislý.

Věta. Úplný graf K_n má n^{n-2} různých koster. Tomuto vztahu říkáme *Cayleyho formule.*

Definice. *Most* v grafu je taková hrana e, že $G \setminus e$ má více komponent souvislosti, než G.

Definice. *Kontrakce hrany* (u, v) v grafu $G(V, E)$ je operace, kdy z grafu odstraníme vrcholy u a v, místo nich přidáme vrchol v' a pro každou hranu (x, u) nebo (x, v), kde $x \in V \setminus \{u, v\}$, přidáme hranu (x, v'). Poté odstraníme všechny násobné hrany. Neformálně řečeno slepíme vrcholy u a v dohromady, a k vzniklému vrcholu připojíme vše, co bylo připojeno k alespoň jednomu vrcholu u, v. Říkáme, že jsme hranu (u, v) zkontrahovali.

Příklad 1. Nechť m, n a k jsou přirozená čísla taková, aby příslušná zadání dávala smysl. Určete počet různých koster následujících grafů: *Pozor, různé kostry skutečně musí být různé, ale nevadí, když jsou izomorfní.*

a) C_n

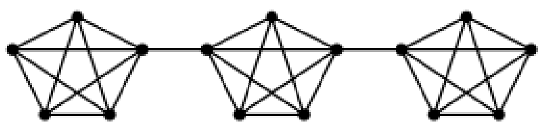
b) Strom na n vrcholech.

c) Graf obsahující 2 vrcholy u a v, které jsou spojené třemi různými cestami délek m, n a k.

d) Úplný bipartitní graf $K_{n,2}$.

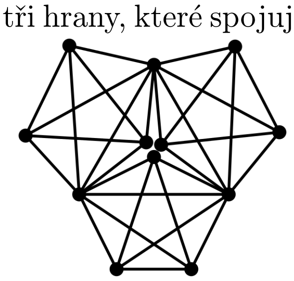
e) Úplný bipartitní graf $K_{n,3}$.

f) Graf z obrázku:



g) Graf z předchozího obrázku, propojíme-li navíc ještě nejpravější a nejlevější vrchol.

h) graf z předchozího cvičení, pokud tři hrany, které spojují jednotlivé pentagramy, zkontrahujeme.



Příklad 2. Mějme souvislý graf G a most v něm e. Rozmyslete si následující tři (do jisté míry ekvivalentní) pozorování:

a) Každá kostra G obsahuje e.

b) $G \setminus e$ nemá žádnou kostru.

c) Kontrakcí e se počet koster nezmění.

Příklad 3. Vzpomeňte si na Kruskalův algoritmus na hledání minimální kostry. Dokažte, že pokud jsou váhy hran po dvou různé, je minimální kostra grafu určená jednoznačně.

Příklad 4. Mějme souvislý graf G a nějaké dvě nejdelší cesty v něm. Dokažte, že tyto cesty mají společný vrchol.

Definice. *Kořenový,* či též *Zakořeněný* strom je strom, v němž navíc jeden vrchol nazveme kořenem. V takovém stromě nazveme pro každý vrchol *otcem* vrchol, který s ním sousedí a je blíže ke kořeni, než on, ostatním sousedům pak budeme říkat *synové*.

Definice. *Pěstovaný* strom je zakořeněný strom, kde je navíc pro každý vrchol dáno pořadí synů.

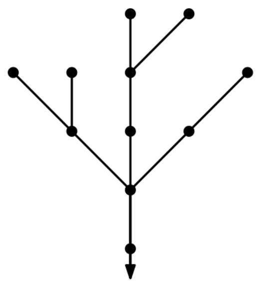
Definice. *Kód* daného zakořeněného stromu je posloupnost nul a jedniček taková, že:

a) Kód samostatného vrcholu je 01,

b) Kód vnitřního vrcholu je 0(lexikograficky uspořádané kódy podstromů)1.

Kód pěstovaného stromu vypadá obdobně, až na to, že kódy podstromů nebereme uspořádané lexikograficky, ale podle pořadí příslušných synů.

Příklad 5. Napište kód následujícího zakořeněného stromu:



Příklad 6. Rozhodněte, pro které všechny kombinace $m, n \in \mathbb{N}$ a $X \in \{\text{Zakořeněný, pěstovaný}\}$ jsou následující výroky pravdivé:

a) Existuje X strom S, jehož kód obsahuje m po sobě jdoucích jedniček, ale neobsahuje n po sobě jdoucích nul.

b) Existuje X strom S, jehož kód obsahuje m po sobě jdoucích nul, ale neobsahuje n po sobě jdoucích jedniček.