2. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Viktor Němeček 9. 10. 2018

https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/dm1819/

Příklad 1. Určete počet relací na n prvcích.

Příklad 2. Najděte $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\})$.

Příklad 3. Dokažte, že $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Y)$, právě když $X = Y$. *Rovnost množin je nadefinována tak, že dvě množiny jsou si rovny, právě když obsahují ty samé prvky. Například množin všech lichých čísel mezi dvojkou a osmičkou a množina prvních tří lichých prvočísel je jedna a ta samá množina, i když má dvě rozdílné definice.*

Příklad 4. Dokažte, nebo vyvraťe následující tvrzení ($\triangle$ značí symetrický množinový rozdíl – $X \triangle Y = \{u \in X \cup Y \mid (u \in X \wedge u \notin Y) \vee (u \notin X \wedge u \in Y)\}$):

a) $(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

b) $(A \cup C) \cap (B \cup D) = (A \cap D) \cup (B \cap C)$

c) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

d) $A \cap (C \triangle B) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

e) $A \cup (C \triangle B) = (A \cup B) \triangle (A \cup C)$

Příklad 5. Určete maximální počet různých množin, které lze získat pomocí operací průnik a sjednocení:

a Ze dvou počátečních množin.

b Ze tří počátečních množin.

Příklad 6. Kolika způsoby umíme vybrat množiny $A, B \subseteq \{1, \ldots, n\}$, pro které platí:

a) $A \subseteq B$

b) $A = \{x\}$ a $x \in B$

c) $|A \cap B| = 1$

$**$ **Příklad 7.** Kolik je k-prvkových podmnožin množiny $\{1, \ldots, n\}$, takových, že neobsahují dvě po sobě jdoucí čísla?

Příklad 8. Kolik je zobrazení $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$? Kolik takových zobrazení je monotónních?

$*$ **Příklad 9.** Kolik je neklesajících zobrazení $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$? Kolik takových zobrazení je monotónních?

Příklad 10. Dokažte, že pro zobrazení $f : X \to X$ na konečné množině X platí, že f je prosté právě když f je na. Platí alespoň jedna z implikací i pro nekonečné množiny?

Příklad 11. Jaké vlastnosti má zobrazení vzniklé složením dvou zobrazení prostých, na, bijekcí, či jejich kombinací?

Příklad 12. Nechť $f : X \to Y$ a $g : Y \to X$ jsou funkce takové, že pro každé $x \in X$ platí $g(f(x)) = x$ a pro každé $y \in Y$ platí, že $f(g(y)) = y$. Dokažte, že f i g jsou bijekce (tedy prosté a na).