4. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Viktor Němeček 23. 10. 2018

https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/dm1819/

Mějme množinu X relaci R na ní, a množinu Y a relaci S na ní. O R a S řekneme, že jsou **izomorfní** *právě když existuje bijekce $f : X \to Y$ taková, že $aRb \Leftrightarrow f(a)Sf(b)$. Jinými slovy lze říct, že R a S jsou izomorfní, když lze R na S převést pouze přejmenováním prvků, na kterých žije.*

Příklad 1. Ukažte, že všechna lineární uspořádání na dané konečné množině jsou izomorfní. Všimněte si, že pro částečná uspořádání již toto tvrzení neplatí.

Příklad 2. Jak dlouhý je nejdelší řetězec a antiřetězec v relaci $(\mathcal{P}(\{1,\dots,n\}),\subseteq)$?

Příklad 3. O následujících relacích na $\mathbb{N}^2$ rozhodněte, zda jsou částečné uspořádání. Které z nich jsou také lineárními uspořádáními?

a) $(a,b) \preceq_a (x,y) \Leftrightarrow a \le x \wedge b \le y$

b) $(a,b) \preceq_b (x,y) \Leftrightarrow a \le x \vee b \le y$

c) $(a,b) \preceq_c (x,y) \Leftrightarrow a < x \vee (a = x \wedge b \le y)$ (tzv. lexikografické uspořádání)

d) $(a,b) \preceq_d (x,y) \Leftrightarrow \max(a,b) > \max(x,y) \vee (\max(a,b) = \max(x,y) \wedge \min(a,b) \le \min(x,y))$

e) $(a,b) \preceq_e (x,y) \Leftrightarrow \max(a,b) > \max(x,y) \vee (\max(a,b) = \max(x,y) \wedge (a,b) \preceq_c (x,y))$

Příklad 4. Rozmyslete si, zda pro libovolné lineární uspořádání $\le$ a libovolné částečné uspořádání $\preceq$ je relace $\preccurlyeq$: $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \prec b \vee ((a$ a b jsou neporovnatelné pomocí $\preceq) \;\wedge a \le b)$ lineárním uspořádáním.

Příklad 5. Na vhodné (ne nutně vždy stejné; ne nutně konečné) množině najděte částečné uspořádání, které bude mít:

a) Žádný maximální nebo minimální prvek.

b) Alespoň jeden maximální prvek, ale žádný nejvyšší.

c) Právě jeden maximální prvek, ale žádný nejvyšší.

d) Nekonečno maximálních prvků ale pouze konečno minimálních.

Příklad 6. Mějme částečně uspořádanou množinu o n prvcích. Nechť r je délka jejího nejdelšího řetězce a a délka nejdelšího antiřetězce. Z věty o dlouhém a širokém víme, že $r \cdot s$ je alespoň n. Umíte pro $r \cdot s$ pouze ze znalosti n určit i nějakou horní mez?

Věta. (Erdős-Szekeresova) V každé polsloupnosti $(r-1)\cdot(s-1)+1$ různých čísel existuje rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

$*$ **Příklad 7.** Dokažte Erdős-Szekeresovu větu.