6. CVIČENÍ Z ADS 1

Viktor Němeček 25. 3. 2019

https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/ads11819/

Definice. Relaxační algoritmus je metaalgoritmus na hledání nejkratší cesty. Vypadá tak, že vždy vezmeme vrchol v, který je potřeba zrelaxovat, podíváme se na vzdálenosti vrcholů u, které jsou s ním spojeny hranou, a pokud jsou vyšší než vzdálenost v plus délka hrany uv, upravíme vzdálenost u a přidáme u mezi vrcholy, které je potřeba relaxovat.

Jedná se o metaalgoritmus, protože není definováno, jak uchovávám množinu vrcholů k relaxaci (a podle jakého kritéria vybírám další vrchol k relaxaci). Můžeme si například všimnout, že Dijkstrův algoritmus je relaxačním algoritmem.

Příklad 1. Mějme relaxační algoritmus, který vrcholy k zrelaxování uchovává v poli a další vrchol k zrelaxování vybírá náhodně. Dokažte, že tento algoritmus je korektní a (na grafu bez záporných cyklů) konečný.

Příklad 2. Navrhněte, jak s pomocí Bellman-Fordova algoritmu najít v ohodnoceném orientovaném grafu záporný cyklus.

Příklad 3. Rozhodněte, zda lze pomocí Bellman-Fordova algoritmu či nějaké jeho modifikace najít nejdelší cestu v grafu (klidně i ohodnoceném pouze kladnými čísly). Pokud ano, jak? Pokud ne, na čem selžou přímočaré modifikace (např. vynásobení všech délek hran -1 či nastavení všech délek hran d_e na $\max_{i \in E}(d_i) - d_e$).

Příklad 4. Kolik nejvíce změn ohodnocení vrcholu může Bellman-Fordův algoritmus na grafu o n vrcholech provést? Co musí naopak platit o pořadí, v němž vrcholy relaxujeme, aby algoritmus ukončil svůj běh po první iteraci?

Příklad 5. Ve směnárně mají n různých měn. Pro některé uspořádané dvojice měn (i, j) mají kurz k, což je kladné reálné číslo, které říká, že pokud přinesete k okénku $k\ell$ jednotek měny i, můžete si odnést ℓ jednotek měny j, kde ℓ je libovolné kladné reálné číslo. Navrhněte algoritmus, který vám zjistí, zda můžete na opakovaném měnění peněz v této směnárně vydělat (tedy zda existuje měna m taková, že máte-li jednotku měny m, můžete s ní provést několik výměn a poté mít ostře více než jednu jednotku měny m).

Příklad 6. František se rozhodl, že si postaví dům. Ke stavbě domu je mimo jiné potřeba jeřáb. Jeřáb je ale tuze vysoká věc, pokud jsou nad silnicí natažené například kabely, nebo nedej bože je celá silnice v tunelu, velký jeřáb nedokáže projet. Mějme tedy město (neorientovaný graf) a pro každou ulici víme, jak vysoký nejvyšší jeřáb touto ulicí projede. Zjistěte pro Františka, jaký nejvyšší jeřáb dokáže dojet od půjčovny jeřábů k jeho staveništi.

Příklad 7. V království mají síť cest. Ke každé cestě je známa hodnota p, která udává, s jakou pravděpodobností budete na této cestě okradeni. Pokud projdu postupně po cestě i a j, tak jevy „Byl jsem okraden na cestě i“ a „Byl jsem okraden na cestě j“ jsou nezávislé. Navrhněte algoritmus, který najde cestu mezi dvěma městy s co nejnižší pravděpodobností okradení.