

7. CVIČENÍ Z ADS 1

Viktor Němeček 1. 4. 2019

<https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/ads11819/>

Příklad 1. Minule jsme viděli, že ač není příliš těžké najít nejkratší cestu, najít nejdelší už problém je. Trpí problém minimální a maximální kostry tím samým problémem?

Příklad 2. Mějme graf G a dvě různá jeho ohodnocení w, w' . Dokažte, že pokud pro každé dvě hrany e, f platí $w(e) > w(f) \Leftrightarrow w'(e) > w'(f)$, pak jsou podle ohodnocení w a w' minimální právě ty samé kostry.

Lemma. (Řezové lemma) Mějme ohodnocený graf takový, že žádné dvě hrany nemají stejnou váhu. Pak pro každý elementární řez platí, že jeho nejlehčí hrana je v každé minimální kostře. *Elementární řez* je řez, pro nějž existuje množina $A \subset V$ taková, že všechny hrany v tomto řezu mají jeden konec v A a druhý v $V \setminus A$.

Příklad 3. Vzpomeňte si na definici řezu. Ukažte, že řezové lemma neplatí, pokud se spokojíme s jakýmkoli řezem, ne jen s elementárním.

Příklad 4. Jak zní řezové lemma, pokud nepožadujeme, aby byly váhy hran unikátní?

Příklad 5. Do určité míry duální k řezovému lemmatu je lemma, které říká, že v ohodnoceném grafu s unikátními délkami hran platí, že v každé kružnici její nejtěžší hrana není v minimální kostře.

- Dokažte toto lemma.
- Jak se toto lemma přeformuluje, pokud délky hran nebudou unikátní?
- Dokážete navrhnout algoritmus, který najde minimální kostru pouze s použitím tohoto lemmatu? (Není potřeba hledat algoritmus s optimální časovou složitostí, pro začátek nám bude stačit něco jako $\mathcal{O}(n + m^2)$). Bude fungovat i bez unikátních délek hran?

Definice. *Borůvkův algoritmus* je algoritmus, který nad grafem s unikátními vahami hledá minimální kostru tak, že nejprve považuje všechny vrcholy za stromy velikosti 1, a poté v každém kroku pro každý stroměček najde nejlehčí s ním incidentní hranu, a tu přidá do kostry.

Příklad 6. Pro Borůvkův algoritmus:

- Dokažte korektnost,
- Rozmyslete si implementaci a pak odhadněte časovou složitost,
- Upravte ho tak, aby mu nevadilo, pokud váhy hran nejsou unikátní.