

# 5. CVIČENÍ Z ADS 1

Viktor Němeček 18. 3. 2019

<https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/ads11819/>

**Příklad 1.** V orientovaném grafu jsou některé vrcholy obarvené zeleně. Navrhněte algoritmus, který zjistí, zda existuje orientovaná kružnice obsahující zelený vrchol.

**Příklad 2.** Navrhněte algoritmus, který v orientovaném ohodnoceném acyklickém grafu spočítá

- a) Počet různých cest
- b) Nejdelsí cestu
- c) Nejkratší cestu

mezi vrcholy  $u$  a  $v$ . Rozmyslete si, že problémy b) a c) umíte řešit i v případě, že jsou hrany délky 0, ale každý vrchol má cenu, kterou musíte zaplatit, abyste jím mohli projít.

**Příklad 3.** Pro každé  $n$  nalezněte graf (neohodnocený nebo ohodnocený kladnými čísly, bez nulových či záporných hran), který má právě  $n$  vrcholů a přitom existují dva vrcholy  $a, b$ , takové že mezi  $a$  a  $b$  existuje  $2^{\Theta(n)}$  různých nejkratších cest. Může jich být ještě více?

**Příklad 4.** Najděte (orientovaný ohodnocený) graf s právě jednou zápornou hranou a bez záporného cyklu, na němž Dijkstrův algoritmus selže (tj. v závislosti na implementaci buď otevře vrchol opakovaně nebo nenajde nejkratší cestu).

**Příklad 5.** Mějme implementaci Dijkstrova algoritmu, která vrcholy, ke kterým byla nalezena kratší cesta, otvírá, i když už předtím byly uzavřené. Najděte graf s celočíselnými délkami hran omezenými polynomem v počtu vrcholů, takový, aby na něm tento algoritmus našel nejkratší cestu až po exponenciálně mnoha krocích.

**Definice.** Relaxační algoritmus je metaalgoritmus na hledání nejkratší cesty. Vypadá tak, že vždy vezmeme vrchol  $v$ , který je potřeba zrelaxovat, podíváme se na vzdálenosti vrcholů  $u$ , které jsou s ním spojeny hranou, a pokud jsou vyšší než vzdálenost  $v$  plus délka hrany  $uv$ , upravíme vzdálenost  $u$  a přidáme  $u$  mezi vrcholy, které je potřeba relaxovat.

Jedná se o metaalgoritmus, protože není definováno, jak uchovávat množinu vrcholů k relaxaci (a podle jakého kritéria vybírám další vrchol k relaxaci). Můžeme si například všimnout, že Dijkstrův algoritmus je relaxačním algoritmem.

**Příklad 6.** Mějme relaxační algoritmus, který vrcholy k zrelaxování uchovává v poli a další vrchol k zrelaxování vybírá náhodně. Dokažte, že tento algoritmus je korektní a (na grafu bez záporných cyklů) konečný.

**Příklad 7.** V hradu jsou čtyři typy různých dveří a čtyři typy různých klíčů. Dveřmi daného typu lze procházet až po sebrání příslušného klíče. Nalezněte nejkratší cestu mezi dvěma body v tomto hradu.