11. CVIČENÍ Z ADS 1

Viktor Němeček 6. 5. 2019

https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/ads11819/

Příklady 1 a 2 byly vyřešeny již minule, jsou zde pouze proto, aby třetí příklad dával smysl.

Příklad 1. Z černé krabičky vede na každou ze dvou stran n drátů. Víme, že uvnitř krabičky je jeden drát z jedné strany vodivě spojený s právě jedním drátem z druhé strany, dráty z téže strany k sobě nikdy připojené nejsou. Povolené operace jsou připojit k danému drátu napětí, odpojit od něj napětí a změřit na něm napětí. Kolik nejméně (asymptoticky) operací potřebujete, abyste zjistili, které dvojice drátů jsou spojené.

∗ **Příklad 2.** Nalezněte neadaptivní řešení na předchozí úlohu (tedy řešení, kde to, které operace provádíte, nezávisí na výsledcích měření.

∗ **Příklad 3.** Dokažte, že předchozí příklad nejde řešit rychleji, než v $\Omega(n \log n)$.

Příklad 4. Máme n bodů v rovině a chceme najít dvojici s nejmenší vzdáleností. Nabízí se rozdělit body vodorovnou přímkou podle mediánu y-ových souřadnic, rekurzivně spočítat nejmenší vzdálenosti ε_1 a ε_2 v obou polorovinách a pak dopočítat, co se děje v pásu o šíři $2\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ podél dělící přímky. Dokažte, že probíráme- -li body pásu zleva doprava, stačí každý bod porovnat s $\mathcal{O}(1)$ sousedy. To vede na algoritmus o složitosti $\Theta(n \log n)$.

Příklad 5. Vymyslete subkvadratický algoritmus, který v dané posloupnosti spočítá inverze. Inverze je neuspořádaná dvojice i, j, taková, že $i > j$ ale $a_i < a_j$, kde i a j jsou přirozená čísla menší nebo rovna délce uvažované posloupnosti.

Příklad 6. Ve standardní úloze Hanojské věže, kde přesouváme věž z trnu A na trn B navíc zakážeme přesun kotoučů přímo mezi trny A a B. Pro jaká n je úloha stále řešitelná? Kolik kroků optimální řešení trvá? Charakterizujte všechny pozice, do kterých se během řešení dostaneme. Můžete se též zamyslet nad řešením pro více než 3 trny, ač v tomto případě je optimální algoritmus otevřený problém.

Příklad 7. Vyřešte následující rekurence:

a) $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n^2)$

b) $T(n) = 2T(n/3) + \Theta(n)$

c) $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$

d) $T(n) = T(n/2) + T(n/3) + \Theta(n)$

e) $T(n) = 2T(n) + \Theta(n \log n)$

f) $T(n) = n^{1/2}T(n^{1/2}) + \Theta(n)$

Pro připomenutí, kuchařková věta říká, že rekurentní rovnice $T(n) = aT(n/b) + \Theta(n^c)$, $T(1) = 1$ má pro konstanty $a \geq 1$, $b > 1$, $c \geq 0$ řešení:

a) $T(n) = \Theta(n^c \log n)$, pokud $a/b^c = 1$;

b) $T(n) = \Theta(n^c)$, pokud $a/b^c < 1$;

c) $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, pokud $a/b^c > 1$.