9. CVIČENÍ Z ADS 1

Viktor Němeček 29. 4. 2019

https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/ads11819/

Odvození algoritmu linearselect

Na přednášce byl ve střední hodnotě lineární algoritmus na hledání k-tého prvku. Pojďme z něj udělat vždy lineární algoritmus.

Příklad 1. Mějme algoritmus na hledání k-tého prvku postavený následovně:

```
LinearSelect(pole,k)
    Pokud je délka pole menší než 5, vyřeš úlohu triviálním algoritmem.
    Rozděl si vstup na pětice
    kandidáti = pole mediánů všech pětic
    pivot = LinearSelect(kandidáti,kandidáti.délka/2)
    pořadi = počet čísel menších než pivot
    výskyty = počet výskytů pivota
    pokud pořadí >= k
        return LinearSelect(Pole prvků menších než pivot,k)
    pokud pořadí + výskyty >= k
        return pivot
        return LinearSelect(Pole prvků větších než pivot,
               k - pořadí - výskyty)
```

Ukažte, že je tento algoritmus korektní a že má lineární časovou složitost.

Příklad 2. Proč se používají zrovna pětice? Fungovaly by například trojice nebo sedmice? Pokud máte povoleno při práci pole libovolně přehazovat, stačí vám konstantní pomocná paměť? Jak dlouhé jsou nejdelší a nejkratší větve stromu rekurze?

Příklad 3. Pro ε ostře mezi nulou a jedničkou definujeme ε-síť množiny čísel X velikosti n jako uspořádanou $\lceil 1/\varepsilon \rceil + 1$-tici prvků $x_0, \ldots, x_{\lceil 1/x \rceil}$ takovou, že $x_0 = \min X$, $x_{\lceil 1/\varepsilon \rceil} = \max X$ a pro každé smysluplné i je ostře mezi x_i a x_{i+1} nejvýše εn prvků X.

Tedy pro $\varepsilon = 2$ hledáme maximum, minimum, a medián, pro $\varepsilon < 1/n$ už třídíme. Najděte algoritmus, který najde ε-síť v čase $\mathcal{O}(n \log(1/\varepsilon))$.

Další příklady

Příklad 4. Z černé krabičky vede na každou ze dvou stran n drátů. Víme, že uvnitř krabičky je jeden drát z jedné strany vodivě spojený s právě jedním drátem z druhé strany, dráty z téže strany k sobě nikdy připojené nejsou. Povolené operace jsou připojit k danému drátu napětí, odpojit od něj napětí a změřit na něm napětí. Kolik nejméně (asymptoticky) operací potřebujete, abyste zjistili, které dvojice drátů jsou spojené.

$*$ **Příklad 5.** Nalezněte neadaptivní řešení na předchozí úlohu (tedy řešení, kde to, které operace provádíte, nezávisí na výsledcích měření.

$*$ **Příklad 6.** Dokažte, že předchozí příklad nejde řešit rychleji, než v $\Omega(n \log n)$.

Příklad 7. Máme n bodů v rovině a chceme najít dvojici s nejmenší vzdáleností. Nabízí se rozdělit body vodorovnou přímkou podle mediánu y-ových souřadnic, rekurzivně spočítat nejmenší vzdálenosti ε_1 a ε_2 v obou polorovinách a pak dopočítat, co se děje v pásu o šíři $2\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ podél dělící přímky. Dokažte, že probíráme- -li body pásu zleva doprava, stačí každý bod porovnat s $\mathcal{O}(1)$ sousedy. To vede na algoritmus o složitosti $\Theta(n \log n)$.