4. CVIČENÍ Z ADS 1

Viktor Němeček 11. 3. 2019

https://kam.mff.cuni.cz/~viki/vyuka/ads11819/

Příklad 1. František bydlí na Manhattanu. Takový Manhattan, to je čtvercová síť ulic. V některých ulicích (a František si pamatuje ve kterých) se však provádí silniční práce a tedy jimi nejde projet. Jednoho dne se Františkovi při cestě z práce se porouchalo auto – nyní umí zatáčet pouze doprava (či jezdit rovně). Vymyslete pro Františka algoritmus, kterým nalezne nejkratší trasu ze své pozice ke svému automechanikovi s takto porouchaným autem. Jak byste algoritmus upravili, kdyby si František na křižovatce, kde začíná, mohl navíc vybrat, kam bude jeho auto otočené?

Příklad 2. Máme graf, v němž jsou některé hrany obarveny zelenou barvou. Dále v něm mějmedány vrcholy u a v. Najděte cestu z u do v obsahující co nejméně zelených hran.

Definice. O grafu G řekneme, že je hranově dvousouvislý, pokud je souvislý a navíc pro každou jeho hranu e platí, že $G \setminus e$ je stále souvislý.

Definice. Rozdělením grafu na dvousouvislé komponenty myslíme rozdělení vrcholů grafu do množin $K_1, K_2, \dots, K_n$, tak, že $\forall v \in V$ náleží do právě jednoho K_i, podgraf indukovaný každým K_i je dvousouvislý a navíc $\forall i \forall V' : K_i \subset V' \subseteq V$ podgraf indukovaný V' dvousouvislý není.

Příklad 3. Ukažte, že rozdělení grafu na dvousouvislé komponenty je jednoznačné a navrhněte algoritmus, který ho najde.

Příklad 4. Rozmyslete si, které orientované grafy mají jednoznačné topologické uspořádání

Definice. O orientovaném grafu G řekneme, že je silně souvislý souvislý, pokud pro každé dva vrcholy u, v existuje jak orientovaná cesta z u do v, tak z v do u.

Definice. Rozdělením orientovaného grafu na silně souvislé komponenty myslíme rozdělení vrcholů grafu do množin $K_1, K_2, \dots, K_n$, tak, že $\forall v \in V$ náleží do právě jednoho K_i, podgraf indukovaný každým K_i je silně souvislý a navíc $\forall i \forall V' : K_i \subset V' \subseteq V$ podgraf indukovaný V' silně souvislý není.

Definice. Kontrakcí hrany grafu rozumíme spojení dvou vrcholů spojených hranou do jednoho. Všechny hrany, které končily v jednom z koncových vrcholů kontrahované hrany natáhneme k novému vrcholu. Na konkrétní aplikazi záleží, zda sloučíme případné vícenásobné hrany do jedné a zda odstraníme z nově vzniklého vrcholu případné smyčky (ve zbytku tohoto cvičení bude odpověď na obě otázky „Ano“; pozor, v orientovaném grafu se hrana uv a vu nebere jako vícenásobná). Obdobně nadefinujeme i kontrakci obecné množiny vrcholů grafu.

Příklad 5. Mějme orientovaný graf. Rozmyslete si, že pokud zkontrahujeme každou silně souvislou komponentu, bude mít výsledný graf topologické uspořádání.

Příklad 6. Navrhněte algoritmus, který v orientovaném ohodnoceném acyklickém grafu spočítá

a) Počet různých cest

b) Nejdelší cestu

c) Nejkratší cestu

mezi vrcholy u a v.