9. cvičení z PSt — 11.–15.4.2021

Soupis vzorečků

- Vztah sdružené hustoty a sdružené distribuční funkce

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)dtds$$
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- Marginální hustota ze sdružené

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

- Dvojné integrály jde prohazovat (Fubiniho věta)

$$\int_X \int_Y f(x,y)dydx = \int_Y \int_X f(x,y)dxdy.$$

  Potřeba je, aby se nejednalo o „integrály typu $\infty - \infty$“, neboli $\int_X \int_Y |f(x,y)|$ musí být konečný

- pro „rozumnou“ množinu A

$$P((X,Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x,y)dxdy.$$

- nezávislost X, Y $\iff$ $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ $\iff$ $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- $\mathbb{E}(X \mid B) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x)dx$
- PNS: $\mathbb{E}(g(X)|B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|B}(x)dx$
- X, Y jsou spojité n.n.v., $Z = X + Y$ má hustotu $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$.

Generování náhodných veličin

1. Vzpomeňte si na větu z přednášky. Nechť $U \sim U(0,1)$. Jak vyrobíte náhodnou veličinu
(a) s rozdělením $U(a,b)$?
(b) s Cauchyho rozdělením? (připomeňte si, že $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$)
(c) s rozdělením $N(0,1)$?

Sdružená hustota

2. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x,y) = e^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).
(a) Určete marginální hustoty f_X, f_Y.
(b) Určete také distribuční funkce F_X, F_Y, $F_{X,Y}$.
(c) Jsou X, Y nezávislé?
(d) Najděte $P(X + Y \leq 1)$ a $P(X > Y)$.

3. (Buffonova jehla) Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky ℓ. Podlaha je z prken, jejich okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti d. Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.

N.n.v.

4. Nechť $X_i \sim Exp(\lambda_i)$ pro $i = 1, \dots, n$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $M = \min(X_1, \dots, X_n)$. Ukažte, že $M \sim Exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

5. Buď Y maximum z k uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$.

(a) Najděte distribuční funkci F_Y.

(b) Odsud určete hustotu f_Y.

(c) Spočtete $\mathbb{E}(Y)$.

(d) Jak je to pro minimum těch čísel?

Konvoluce

6. Buďte $X, Y, Z \sim U(0, 1)$ nezávislé náhodné veličiny.

(a) Jaké je rozdělení $X + Y$? Určete hustotu (dvěma způsoby) – podle konvolučního vzorce i „podle obrázku“.

(b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu $[0, 1]$.

(c) Jak výsledek ověřit samplováním? (Proveďte rychlý experiment, např. v Rku, nebo jen popište, co byste dělali.)

7. Buďte $X, Y, Z \sim Exp(\lambda)$ nezávislé náhodně veličiny.

(a) Jaké je rozdělení $X + Y$?

(b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$?

K procvičení

8. Volme uniformně náhodně bod z polokruhu o poloměru 1, se středem v počátku a v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.

(b) Najděte marginální hustotu f_Y a spočtěte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.

(c) Pro kontrolu spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí pravidla PNS).

9. Nechť X je n.v. s hustotou

$$f_X(x) = \begin{cases} x/4 & \text{pro } 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Označme A jev $\{X \geq 2\}$.

(a) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$, $P(A)$, $f_{X|A}$ a $\mathbb{E}(X \mid A)$.

(b) Označme $Y = X^2$. Spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ a $\mathrm{var}(Y)$.

Nápověda

1a: Napište vzorec distribuční funkce $U(a, b)$ a odsud určete kvantilovou funkci.

1b: Hustota Cauchyho rozdělení je $c/(1 + x^2)$. Jaké musí být c, aby to byla hustota? Jaká je distribuční funkce, jaká je kvantilová funkce?

1c: Pro normální rozdělení nehledejte explicitní vzorec, jen formulku pomocí Φ.

2d: Nakreslete, přes jakou množinu se má integrovat. Pak případně vyjádřete jako dvojný integrál se správně zapsanými mezemi.

Pokud zvlédnete to, zbytek je lehký.

3: Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel).

4: Jaká je distribuční funkce M pomocí distribučních fcí $X_1, \dots, X_n$.

5: Jaká je distribuční funkce Y pomocí distribučních fcí těch uniformně náhodných čísel?

6,7: Přesně podle věty.

8: (a) hustota je konstatní v tom polokruhu, nulová jinde. (b) Integrace podle x. (c) Máte dvě možná pořadí integrování. Jedno vede na stejný výpočet jako v části (b).