

4. cvičení z PSt — 7.–11.3.2022

Náhodné veličiny

Z obou částí vyřešte aspoň jeden příklad.

1. Necht' $X \sim \text{Bin}(m, p)$ a $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ jsou n.n.v. Pak $X + Y \sim \text{Bin}(m + n, p)$.
 2. Necht' $X = X_1 + \dots + X_n$, kde pro každé i je $X_i \sim \text{Bern}(p)$. Pokud jsou veličiny X_1, \dots, X_n nezávislé, tak $X \sim \text{Bin}(n, p)$ (zatím bez definice nezávislých veličin ...). Ukažte na příkladu, že pokud omezení na nezávislost neuvedeme (tj. chceme jen $X_i \sim \text{Bern}(p)$), tak X může mít i jiné rozdělení.
 3. Nezávislé n.v. X_1, \dots, X_n mají geometrické rozdělení s parametry p_1, \dots, p_n . Jaké je rozdělení $\min(X_1, \dots, X_n)$?
 4. Necht' X má uniformní rozdělení na množině $\{a, a + 1, a + 2, \dots, b\}$ (pro celá čísla $a < b$). Určete $\mathbb{E}(X)$.
 5. V pytlíku je N bombónů, z nichž K je dobrých. Náhodně vytáhneme dva, označíme X počet dobrých vytažených bombónů.
 - (a) Určete $\mathbb{E}(X)$.
 - (b) Můžete i napřed řešit pro tažení jen jednoho bombónu.
 - (c) Jak se jmenuje rozdělení n.v. X ?
 - (d) * A co když vytáhneme tři, čtyři, ..., n bombónů?
-

6. Filip má školu 2 km daleko od domu. Když prší (pravděpodobnost 0.6), tak jde pěšky rychlostí 5 km/h. Jinak jede na kole rychlostí 10 km/h.

Jaká je průměrná rychlost, kterou cestuje do školy? Jaký je průměrný čas, který cesta trvá?

7. V televizní soutěži si účastník může vybrat dvě otázky. U první z nich odhaduje, že správně odpoví s pravděpodobností 0.8 (a dostane za to 1 000 Kč). U druhé otázky je jeho pravděpodobnost úspěchu jen 0.5, zato za správnou odpověď dostane 2 000 Kč. Po špatné odpovědi hra končí, po správné může zkusit druhou otázku (a odměnu za už správně odpovězenou otázku mu při špatné odpovězení další nepropadne).

- (a) Jaká je střední hodnota výhry, pokud začne první otázkou?
- (b) Jaká je střední hodnota výhry, pokud začne druhou otázkou?
- (c) Bonus: pokud jsou pravděpodobností úspěchu p_1, p_2 a odměny m_1, m_2 , jak se má soutěžící rozhodnout?
- (d) * A co když těch otázek bude víc než dvě?

8. (Kasino v St. Petersburgu) Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n -tém hození, dostaneme odměnu 2^n rublů. Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?