10. cvičení z PSt — 25.–29.4.2022

Sdružená hustota

1. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x,y) = e^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).
(a) Určete marginální hustoty f_X, f_Y.
(b) Určete také distribuční funkce F_X, F_Y, $F_{X,Y}$.
(c) Jsou X, Y nezávislé?
(d) Najděte $P(X + Y \leq 1)$ a $P(X > Y)$.

2. Volme uniformně náhodně bod z polokruhu o poloměru 1, se středem v počátku a v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.
(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.
(b) Najděte marginální hustotu f_Y a spočtěte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.
(c) Pro kontrolu spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí PNS).

Podmíněná střední hodnota

3. Nechť X je n.v. s hustotou

$$f_X(x) = \begin{cases} x/4 & \text{pro } 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Označme A jev $\{X \geq 2\}$.
(a) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$, $P(A)$, $f_{X|A}$ a $\mathbb{E}(X \mid A)$.
(b) Označme $Y = X^2$. Spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ a $\mathrm{var}(Y)$.

Podmíněná hustota

4. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{pro } 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.
(b) Určete podmíněnou hustotu $f_{Y|X}$.

5. Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a ponecháme si levý kus. Jeho délku označíme Y. V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, kde klacek zlomíme, a délku levého kusu označíme X.
(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Může vám pomoci podmíněná hustota $f_{X|Y}$.
(b) Najděte marginální hustotu f_X.
(c) Pomocí f_X spočtěte $\mathbb{E}(X)$.
(d) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí vztahu $X = Y \cdot (X/Y)$.

6. Metrový klacek rozlomíme na tři kusy jedním z níže popsaných způsobů. Pro každý z nich spočítejte, jaká je pravděpodobnost, že ze získaných tří kusů jde sestavit trojúhelník. (Nápověda: napřed si rozmyslete, kdy jsou tři kladná čísla se součtem jedna stranami nějakého trojúhelníku.)
(a) Vybereme uniformně náhodně dva body zlomu.
(b) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s kusem klacku v pravé ruce.
(c) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s větším kusem klacku.

7. Volme uniformně náhodně bod z trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0,0]$, $[0,1]$ a $[1,0]$, tj. pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu. Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.
(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.

(b) Najděte marginální hustotu f_Y.
(c) Najděte podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.
(d) Spočtěte $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$ a podle věty o rozboru možností spočtěte $\mathbb{E}(X)$ (pomocí $\mathbb{E}(Y)$).
(e) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí předchozí části a symetrie.

Aplikace nerovností a Centrální Limitní Věty

Pro výpočty s funkcí Φ použijte tabulku z 5. cvičení nebo vhodný software, např. `https://t.ly/JRQ2`.

8. Počítání obsahu kruhu náhodným samplováním. Vygenerujeme náhodný bod ve čtverci (obě souřadnice budou mít rozdělení $U(0,1)$). Označíme X_i indikátor jevu „i-tý bod leží ve vepsaném kruhu“.
(a) Určete $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathrm{var}(X_i)$.
(b) Položte $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Určete $\mathbb{E}(S_n)$ a $\mathrm{var}(S_n)$.
(c) Všimněte si, že lze počítat S_n z S_{n-1}, X_n a n (nižší nároky na paměť).
(d) Pro jaké n čekáte, že dostaneme výsledek správně na jedno desetinné místo? Na dvě, tři, ...?

9. Statistik chce odhadnout průměrnou výsku h (v metrech) lidí v nějaké populaci, pomocí n nezávislých vzorků $X_1, \dots, X_n$, které vybíráme uniformně náhodně se všech možnych lidí. Pro odhad použije výběrový průměr $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Odhaduje, že směrodatná odchylka jednoho výběru je nejvýše 1 metr.
(a) Jak velké n má volit, aby směrodatná odchylka S_n byla nejvýše 1 cm?
(b) Pro jaké n zajistí Čebyševova nerovnost, že pravděpodobnost, že M_n se liší od h nejvýše o 5 cm s pravděpodobností alespoň 99%?
(c) Statistik si všimne, že všichni měření lidé mají výšku v intervalu $(1.4, 2.1)$. Jak má upravit odhad směrodatné odchylky? Jak se změní odpovědi na předchozí otázky?

10. Označme $S = \sum_{k=0}^{30} \binom{100}{k}$. Označme dále $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$, kde X_i je ± 1 s pravděpodobností $1/2$ a veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé.
(a) Vyjádřete S pomocí vhodné pravděpodobnosti výroku o X.
(b) Použijte CLV na odhad této pravděpodobnosti.
(c) Případně vyčíslete S vhodným softwarem a srovnejte.