

1. Volíme uniformně náhodně bod z polokruhu o poloměru 1 se středem v počátku a v horní polovině. Naše volby jsou uniformně náhodné, tedy pravděpodobnost zásahu libovolné oblasti je úměrná jejímu obsahu. Označme X a Y souřadnice vybraného bodu.
 - a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.
 - b) Najděte marginální hustotu f_Y a spočtěte pomocí ní $\mathbb{E}[Y]$.
 - c) Pro kontrolu spočtěte $\mathbb{E}[Y]$ přímo pomocí pravidla naivního statistika.

2. Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a necháme si levý kus, jehož délku označme Y . V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, ve kterém klacek zlomíme a necháme si levý kus, jehož délku označíme X .
 - a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Pomozte si podmíněnou hustotou $f_{X|Y}$.
 - b) Najděte marginální hustotu f_X .
 - c) Pomocí f_X spočtěte $\mathbb{E}[X]$.
 - d) Spočtěte $\mathbb{E}[X]$ pomocí vztahu $X = Y \cdot \frac{X}{Y}$.

3. Nechť X je náhodná veličina s hustotou

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{pro } 1 < x \leq 3, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Označme A jev $\{X \geq 2\}$.

- a) Spočtěte $\mathbb{E}[X]$, $\Pr[A]$, $f_{X|A}$ a $\mathbb{E}[X | A]$.
 - b) Označme $Y = X^2$. Spočtěte $\mathbb{E}[Y]$ a $\text{Var}[Y]$.
-
4. Chceme počítat obsah kruhu sámkováním. Vygenerujeme náhodný bod v jednotkovém čtverci, tj. obě souřadnice vygenerovaného bodu jsou rozdělené podle $\mathcal{U}(0, 1)$. Nechť X_i je indikátor jevu „ i -tý vygenerovaný bod je uvnitř kružnice vepsané čtverci“.
 - a) Určete $\mathbb{E}[X_i]$ a $\text{Var}[X_i]$.
 - b) Nechť $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$. Spočtěte $\mathbb{E}[S_n]$ a $\text{Var}[S_n]$.
 - c) Pro jaké n čekáte, že výsledek bude správný na jedno desetinné místo? Co na dvě, tři, ...?