1 Vzorové příklady

1. Jaké z *vlastností relací (reflexivní, symetrická, tranzitivní, antisymetrická)* má následující relace:

$$R = \{(-2, 5), (5, 5), (5, -2), (0, 0)\}?$$

   Je to ekvivalence či uspořádání?

2. Jak vypadá relace $R \circ R$, označuje-li R relaci $\leq$ na $\mathbb{N}$?

2 Příklady pro Vás

1. Jaké z *vlastností relací (reflexivní, symetrická, tranzitivní, antisymetrická)* mají následující relace? Jsou to ekvivalence či uspořádání?

   - $R_1 = \{(-2, -2), (5, -2), (0, 5), (0, 0), (0, -2)\}$ na množině $\{-2, 0, 5\}$.
   - $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2; x \geq y\}$.
   - $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y \in \mathbb{N}\}$.
   - $R_4 = \{(x, y) \in \{1, \ldots, 10\}^2; x$ a y jsou nesoudělné$\}$.
   - $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2; x \mid y\}$.

2. Jak vypadá relace $R \circ R$, označuje-li R

   a) relaci rovnosti na množině $\mathbb{Z}$,

   b) relaci $<$ na $\mathbb{N}$,

   c) relaci $<$ na $\mathbb{R}$.

3. Najděte relaci na $\{1, 2, 3, 4\}$, která

   a) je současně symetrická i antisymetrická,

   b) není ani symetrická, ani antisymetrická.

4. Dokažte, že relace $R \subseteq X \times Y$ je tranzitivní právě, když $R \circ R \subseteq R$.

5. Najděte relace R, S na libovolné množině takové, že $R \circ S \neq S \circ R$.

6. Dokažte, že pro každou binární relaci R na množině X platí, že relace $T = \cup_{i=1}^{\infty} R^i$ je tranzitivní.

7. Označme $T = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ množinu všech uspořádaných trojic reálných čísel. Rozhodněte, zda následující relace jsou ekvivalence na T.

   a) Trojice (x_1, x_2, x_3) je v relaci E_1 s trojicí (y_1, y_2, y_3), právě když $x_1 = y_1$.

   b) Trojice (x_1, x_2, x_3) je v relaci E_2 s trojicí (y_1, y_2, y_3), právě když $x_1 = y_1$ nebo $x_2 = y_2$ nebo $x_3 = y_3$.

   c) Trojice (x_1, x_2, x_3) je v relaci E_3 s trojicí (y_1, y_2, y_3), právě když existují indexy $i, j \in \{1, 2, 3\}$ takové, že $x_i = y_j$.

8. Popište třídy ekvivalencí následujících ekvivalencí[1] na nějaké množině X.

   a) $X = \mathbb{Z}$. $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$.

[1] Můžete mi věřit, že jsou to vskutku ekvivalence.

b) $X = 2^{\{1,\ldots,n\}}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. $xRy \Leftrightarrow$ mezi x a y existuje bijekce.

c) $X = \mathbb{Z}$. $xRy \Leftrightarrow 7 \mid (x - y)$.