1 Vzorové příklady

Tyhle příklady spočítám před Vámi na začátku hodiny, abyste věděli, která bije.

1. Dokažte, že
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}(n^2+n).$$

Definice. *Fibbonacciho posloupnost* $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ definujeme následovně:

- $F_1 = 1$, $F_2 = 1$.
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

2. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1},$$
a
$$F_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

2 Příklady pro Vás

Tyhle příklady si spočítáte sami a následně ve skupině.

1. Dokažte následující tvrzení (třeba matematickou indukcí).

   a) $\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = n^2$.
   b) $\Pi_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$.

2. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $4 \mid (6n^2+2n)$. (Čteme: čtyři dělí $6n^2+2n$ beze zbytku).

3. Dokažte následující tvrzení pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

   - $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.
   - $\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$.

4. Dokažte, že počet částí roviny při rozdělení n přímkami je nejvýše $1 + \frac{1}{2}(n^2+n)$.

5. Je dáno $x \in \mathbb{R}$ takové, že $x + \frac{1}{x}$ je celé. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je i $x^n + \frac{1}{x^n}$ celé.

6. Máme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ pro $n \in \mathbb{N}$, kde chybí jedno políčko. Ukažte, že je možné šachovnici vydláždit dlaždicemi ve tvaru písmene „L“, neboli čtvercem s ukousnutým rohem.

3 Pro ty, co se nudí

Tady jste odkázáni sami na sebe. Správné řešení dostanete jen tak, že mi ho řeknete, až k Vám přijdu. Já ho zpravidla neznám, ale asi bych ho dokázal ověřit.

1. Občas je možné dělat indukci pozpátku, tedy od n jít k $n-1$. Uvažte následující tvrzení (zadání pokračuje na druhé straně)
$$P(n): \qquad x_1 \cdot \dots \cdot x_n \leq \left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)^n, \text{ pro } x_1,\dots,x_n \geq 0.$$

a) Nejprve dokažte, že tvrzení platí pro $n = 2$.

b) Dokažte, že $P(n)$ implikuje $P(n-1)$.

c) Dokažte, že $P(n)$ a $P(2)$ implikuje $P(2n)$.

d) Na závěr dokažte, je tvrzení dokázáno pro všechna n.