1. Dokažte, že počet částí roviny při rozdělení n přímkami je nejvýše $1 + \frac{1}{2}(n^2 + n)$.

2. Je dáno $x \in \mathbb{R}$ takové, že $x + \frac{1}{x}$ je celé. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je i $x^n + \frac{1}{x^n}$ celé.

3. Máme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ pro $n \in \mathbb{N}$, kde chybí jedno políčko. Ukažte, že je možné šachovnici vydláždit dlaždicemi ve tvaru písmene „L“, neboli čtvercem s ukousnutým rohem.

4. Dokažte následující tvrzení (třeba matematickou indukcí).

   a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}(n^2 + n)$.
   b) $\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$.
   c) $\sum_{k=1}^{n} 4k + 5 = 2n^2 + 7n$.
   d) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.
   e) $\Pi_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$.

5. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $4 \mid (6n^2 + 2n)$.

Definice. *Fibbonacciho posloupnost* $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ definujeme následovně:

- $F_1 = 1$, $F_2 = 1$.
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

6. Dokažte následující tvrzení pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

   - $F_n \leq (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}$.
   - $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
   - $\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$.

7. Dokažte, že pro každé přirozené $n \geq 4$ platí

$$F_n^2 = 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2.$$