Zkoušková písemka z Matematické analýzy I. (cvičná)

Čas: 2 hodiny.

Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály. Není-li uvedeno jinak, pečlivě zdůvodněte svůj postup. Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazu, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutno uvést, že a kterou větu používáte. Všechna ostatní tvrzení dokažte.

1. *(3 body)* Definujte limitu posloupnosti.
2. *(4 body)* Přímo z definice dokažte, že posloupnost $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n=1}^{\infty}$ má limitu nula.
3. *(6 bodů)* Rozhodněte a zdůvodněte, zda jeden výrok implikuje ten druhý. O každé ze dvou možných implikací ukažte, že platí, nebo uveďte příklad kdy neplatí.
   (i) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
   (ii) (a_n) je omezená zdola a není omezená shora.
4. *(9 bodů)* Formulujte větu o jednoznačnosti limity a dokažte ji pro vlastní limity.
5. *(10 bodů)* Dokažte, že pokud f je definovaná na $\mathbb{R}$ a platí $|f(x)| \leq |x|$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, f je spojitá v 0.
6. *(3 body)* Formulujte větu o charakterizaci Taylorova polynomu.
7. *(12 bodů)* Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x(6-x)^{\frac{2}{3}}$: určete definiční obor, obor hodnot, monotonii a extrémy. Na základě těchto poznatků načrtněte graf funkce.
8. *(3 body)* Definujte horní a dolní Riemannův integrál.
9. *(12 bodů)* Formulujte a dokažte druhou základní větu analýzy.
10. *(8 bodů)* Spočtěte $\int_0^{9\pi/2} \sin^n x \cos x \, dx$.
11. *(10 bodů)* Použitím kritéria integrovatelnosti, dokažte, že pokud je funkce f je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,b]$, je $|f|$ také Riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$.