

Topologické metody v kombinatorice - 4. série

Nápověda: 13. 12. 2007

Řešení: 20. 12. 2007

Řetězce

1. Nechť C_k je k -řetězec v simplicialním komplexu K a $f:K \rightarrow L$ je simplicialní zobrazení. Dokažte, že $\partial f_{\#,k}(C_k) = f_{\#,k-1}(\partial C_k)$. **(2 body)**

Variace na Ham Sandwich Theorem

V následujících příkladech není klíčové, že se jedná o kompaktní podmnožiny \mathbb{R}^2 . U všech příkladů by namísto kompaktních podmnožin mohly vystupovat konečné borelovské míry takové, že každá přímka má nulovou míru. Snaha je, aby příkladům rozuměli i ti, co teorii míry neznají. Pokud naopak máte problémy i s obsahem (mírou) obecných kompaktních množin, řešte úlohy alespoň pro mnohostěny.

2. Dokažte, že každou kompaktní podmnožinu \mathbb{R}^2 lze rozřezat dvěma přímkami na 4 části o stejném obsahu. **(1 bod)**
3. Rozhodněte, zda každou kompaktní \mathbb{R}^2 lze rozřezat třemi přímkami procházejícími tímž bodem na 6 částí o stejném obsahu. **(6 bodů)**
4. Ukažte, že $1:1$ je jediný poměr takový, že libovolné dvě kompaktní podmnožiny \mathbb{R}^2 lze obě rozdělit přímkou v tomto poměru. **(2 body)**

Kneserovy grafy

5. V závislosti na přirozeném n a k (kde $n \geq 2k - 1$) určete minimální možnou délku lichého cyklu v Kneserově grafu $KG_{n,k}$. **(3 body)**
6. V závislosti na přirozeném n a k (kde $n \geq 2k - 1$) určete maximální možný počet vrcholů úplného bipartitního podgrafu $KG_{n,k}$. **(2 body)**

Poznámka: V případě, že budete za účelem vyřešení některého z příkladů definovat nějakou složitější spojitou funkci. Mělo by být z vašeho popisu jasné, že se jedná o spojitou funkci, ale nemusíte spojitost dokazovat do všech detailů.