9. série

(10. prosince 2007)

1. úloha Nalezněte všechny rozklady $\mathbb{N}$ do dvou neprázdných disjunktních množin A a B takové, že když $a_1, a_2, a_3 \in A$, potom i $a_1 + a_2 + a_3 \in A$ a podobně, když $b_1, b_2, b_3 \in B$, potom i $b_1 + b_2 + b_3 \in B$.

2. úloha Dokažte, že pro každé přirozené k existuje trojice (a, b, c) přirozených čísel taková, že $abc = k(a+b+c)$. Dokažte navíc, že za takové situace není $a^3+b^3+c^3$ prvočíslo.

3. úloha Dokažte či vyvraťte následující tvrzení. V ostroúhlém trojúhelníku ABC se osa úhlu při vrcholu A, osa strany AC a výška z bodu C protínají v jednom bodě právě tehdy, když kružnice se středem v patě výšky z bodu C procházející bodem A, osa úhlu při vrcholu A a strana BC mají společný průsečík.

4. úloha Buď $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, pro $x > 1$. Dokažte, že $f^{(n)}(x) > 0$ pro n liché.

5. úloha Nechť $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce taková, že

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

pro všechny vektory u a v na sebé kolmé. Dokažte, že existují $c \in \mathbb{R}$ a $v_0 \in \mathbb{R}^k$ takové, že $f(u) = c||u||^2 + u \cdot v_0$.

6. úloha Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sqrt{\binom{n}{k}}.$$