8. série

(3. prosince 2007)

1. úloha Pro každé přirozené n dokažte, že počet dělitelů n končících na 1 či 9 je větší roven počtu dělitelů končících na 3 nebo 7.

2. úloha Dokažte, že pokud je $2^n + n^2$ prvočíslo, pak platí $n \equiv 3 \pmod 6$

3. úloha V závislosti na přirozeném čísle n určete maximalní možný počet matic obsahujících v nějakém pořadí prvky 1, 2, 3, ..., n^2 takových, že neexistují dva různé řádky i a j, dva různé prvky k a l dvě matice A a B takové, že prvky k a l jsou oba v i. řádku matice A a zároveň jsou oba v j. řádku matice B.

4. úloha Nechť P je polynom (stupně alespoň 2) s reálnými koeficienty

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots,$$

takový, že $a \neq 0$ a $(n-1)b^2 - 2nac < 0$. Dokažte, že P má nejvýše $n-2$ různých reálných kořenů.

5. úloha Pro přirozená s a t spočtěte[1]

$$\sum_{j=0}^{t} \binom{s+j}{j} 2^{t-j} + \sum_{j=0}^{s} \binom{t+j}{j} 2^{s-j}.$$

6. úloha Buď (M, ρ) souvislý metrický prostor konečného průměru, ve kterém má každý bod okolí homeomorfní B^n pro nějaké pevné n. Dokažte či vyvraťte: Každé dva body M mohou být v M spojeny cestou[2] konečné délky.

[1] Je možné, že tuto úlohu budu chtít použít pro seriál prasátka, proto ji, prosím, raději neukazujte řešitelům. Díky, Martin.

[2] Cestou spojující dva body $x, y \in M$ rozumíme spojitou funkci $f\colon [0,1] \to M$ takovou, že $f(0) = x$ a $f(1) = y$. Délkou této cesty myslíme

$$\sup \left\{ \sum \rho(f(x_i), f(x_{i+1})) \middle| k \in \mathbb{N}, 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = 1 \right\}.$$