7. série

(26. listopadu 2007)

1. úloha Pro n přirozené dokažte, že $(n+1)(n+2)\cdots(2n)$ je dělitelné 2^n.

2. úloha Pro $x \in (0,1)$ určete hodnotu výrazu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor 2^n x \rfloor}}{2^n}.$$

3. úloha Pro přirozené n označme $T_n = 2^n + 1$. Dokažte, že pro přirozená n a k platí $T_n | T_{n+k\varphi(T_n)}$. Symbol $\varphi(m)$ značí Eulerovu funkci v přirozeném m, tj. počet přirozených čísel nesoudělných s m a menších jako m.

4. úloha Nechť n a k jsou přirozená. Nechť $A = (a_{ij})$ je $n \times n$ matice a D_1, D_2, $\ldots$, D_n jsou $k \times k$ matice. Nechť M je bloková matice $nk \times nk$ s bloky velikosti $k \times k$, kde v bloku se souřadnicemi (i,j) je matice $a_{ij} D_j$. Spočítejte determinant matice M v závislosti na determinantu matice A a matic D_1, D_2, $\ldots$, D_n.

5. úloha Určete infimum

$$\int_0^a \sqrt{(f(t)-t)^2 + (f'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

přes všechny diferencovatelné funkce na intervalu $(0,a)$.

6. úloha Trojúhelník T a (hladká) uzavřená křivka φ v rovině splňují následující podmínku: Na křivce φ lze vybrat tři body $A(0)$, $B(0)$ a $C(0)$ takové, že trojúhelník T je shodný s trojúhelníkem $A(0)B(0)C(0)$. Dále lze s body $A(0)$, $B(0)$ a $C(0)$ pohybovat v čase $t \in [0,1]$ (každý bod se může pohybovat jinou rychlostí) v jednom zvoleném směru po křivce φ, a to tak, že získáváme body $A(t)$, $B(t)$ a $C(t)$ takové, že v každém čase $t \in [0,1]$ je trojúhelník $A(t)B(t)C(t)$ opět shodný s T. Navíc $A(0) = A(1)$, $B(0) = B(1)$ a $C(0) = C(1)$. Rozhodněte, zda je φ nutně kružnice?