

6. série

(19. listopadu 2007)

1. úloha Necht a a a' ; b a b' ; c a c' jsou tři dvojice protilehlých hran čtyřstěnu. Dokažte, že čísla $a + a'$, $b + b'$ a $c + c'$ splňují trojúhelníkovou nerovnost.

2. úloha Sečtěte řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sin^3 \left(\frac{x}{3^n} \right).$$

3. úloha Prvočíselný rozklad $n + 1$ přirozených čísel obsahuje jen n prvočísel. Dokažte, že existuje neprázdná podmnožina těchto $n + 1$ čísel taková, že součin jejích prvků je čtverec.

4. úloha Necht je dáno $\alpha \in [0, 1]$ a n přirozené. Na kružnici o obvodu 1 zvolíme náhodně, rovnoměrně, nezávisle n bodů. Spočítejte pravděpodobnost, že těchto n bodů lze pokrýt obloukem délky α .

5. úloha Necht $T = V_1 V_2 \cdots V_n$ je simplex a G je jeho těžiště. Označme V_i' průsečík (různý od V_i) sféry opsané T a přímkou $V_i G$. Dokažte, že

$$\text{vol } V_1' V_2' \cdots V_n' \geq \text{vol } T,$$

kde symbol vol značí $(n - 1)$ -rozměrný objem.

6. úloha Necht $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ je posloupnost reálných funkcí. Dokažte, že existují reálné funkce g a h takové, že libovolné f_i lze získat jenom skládáním funkcí g a h .