

## 5. série

(5. listopadu 2007)

**1. úloha** Rozřezejte dva shodné pravidelné šestiúhelníky tak, aby ze vzniklých dílků šlo poskládat rovnostranný trojúhelník.

**2. úloha** Dokažte, že pro všechna  $x \in (0, \pi)$  a  $y \in (0, 1)$  platí

$$y \sin x < \sin xy.$$

**3. úloha** Nechtě  $A_0A_1 \cdots A_n$  je simplex v  $\mathbb{R}^n$ . Pro  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  označme  $V_i$   $n$ -rozměrný objem (Lebesgueovu míru) stěny ležící naproti  $A_i$ . Dokažte, že

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_n > V_0.$$

**4. úloha** Nalezněte všechna  $(a, b, c) \in (\mathbb{Z}_0^+)^3$  taková, že

$$7^a + 1 = 3^b + 5^c.$$

**5. úloha** Nechtě  $a_i$  je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Musí řada

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\text{lcm}(a_i, a_{i+1})}$$

konvergovat? Výraz  $\text{lcm}$  značí nejmenší společný násobek.

**6. úloha** Nechtě  $\sigma$  je permutace cifer  $0, 1, \dots, 9$ . Nechtě  $f: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  je definována následujícím způsobem, když  $x = \overline{0, x_1x_2x_3 \cdots}$  je desetinný rozvoj  $x$ , potom  $f(x) = \overline{0, \sigma(x_1)\sigma(x_2)\sigma(x_3) \cdots}$ . (Pro jednoznačnost desetinného rozvoje uvažujeme rozvoj  $x$  takový, který nemá jenom devítky krom konečně mnoha pozic.)

- (i) Nalezněte body, ve kterých je  $f$  spojitá (diferencovatelná).
- (ii) Spočítejte Riemannův integrál z  $f$ .