3. série

(22. října 2007)

1. úloha Nechť A je množina nějakých šesti po sobě jdoucích přirozených čísel. Dokažte, že existuje prvočíslo p, které dělí právě jeden prvek množiny A.

2. úloha Reálná funkce f splňuje $f'(x) < 0 < f''(x)$ pro každé $x < 0$ a také $f'(x) > 0 > f''(x)$ pro každé $x > 0$. Dokažte, že f není diferencovatelná v 0.

3. úloha Vrcholy pravidelného $2n$-úhelníku jsou obarveny bíle a černě (bílých i černých vrcholů je n). Jeden bílý vrchol je očíslován 1 a další bílé vrcholy jsou číslovány $2, 3, \ldots, n$ ve směru hodinových ručiček počínaje vrcholem 1. Podobně jeden černý vrchol je očíslován 1 a další vrcholy jsou číslovány $2, 3, \ldots, n$ – tentokrát proti směru hodinových ručiček. Dokažte, že existuje n po sobě jdoucích vrcholů mnohoúhelníku používajících všechna čísla $1, 2, \ldots, n$.

4. úloha V rovině je dán n-úhelník s délkami stěn $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dokažte, že

$$\frac{2n}{n-1} \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \le 4 \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j .$$

5. úloha Nalezněte všechny darbouxovské funce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že existuje n, že $f^n(x) = -x$ (n. složení, nikoliv mocnina). Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je darbouxovská, když pro každé $a < b \in \mathbb{R}$ nabývá na intervalu $[a, b]$ všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

6. úloha Předpokládejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, kde $a_n \in (0, \infty)$. Dokažte, že pro každý rozklad $\mathbb{N}$ na konečné množiny I_n ($n \in \mathbb{N}$) existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $a_m \ge \sum_{n \in I_m} a_m$.