2. série

(15. října 2007)

1. úloha Nechť S_n značí ciferný součet 2^n. Dokažte, že $S_n \neq S_{n+1}$, pro n přirozené.

2. úloha Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že její graf má alespoň dva středy souměrnosti. Dokažte, že f je součtem lineární a periodické funkce.

3. úloha Posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ a

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2} + 7}{a_n} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že všechna a_n jsou celá.

4. úloha Dokažte, že neexistuje vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, který je konečným sjednocením svých vlastních podprostorů.

5. úloha Turnaje sestávajícího z nekonečně mnoha kol se účastní $2k$ hráčů. V každém kole hraje každý hráč s právě jedním soupeřem. Vítěz získá 1 bod. Průběžné pořadí hráčů je vyhodnoceno po každém kole. Mají-li dva hráči stejný počet bodů, potom je jejich pořadí určeno podle abecedy (žádní dva se nejmenují stejně). V následujícím kole hraje průběžný vítěz s průběžně druhým, třetí se čtvrtým, atd. Předpokládejme, že hráč A porazí hráče B s pravděpodobností $p_{A,B}$ nezávisle na výsledcích ostatních her. Víme, že jeden z hráčů porazí všechny ostatní se stejnou pravděpodobností $p > \frac{1}{2}$. Označme X_n pořadí tohoto hráče po n. kole. Je nutně pravda, že $\lim_{n\to\infty} X_n = 1$ skoro jistě?

6. úloha Nalezněte minimální reálné C takové, že nerovnost

$$\int_0^1 \left| \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \right|^2 \mathrm{d}x \leq C \int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

platí pro všechny $f \in L^2[0,1]$ (tj., pokud pravá strana nerovnosti existuje a je konečná).