

# 11. série

(7. ledna 2008)

**1. úloha** Pro která přirozená  $n$  lze čísla  $1, 2, \dots, n$  uspořádat do posloupnosti tak, že průměr žádných dvou neleží mezi nimi.

**2. úloha** Krychle je rozřezaná na konečně mnoho kvádrů. Sočet objemů koulí opsaných těmito kvádry je roven objemu koule opsané krychli. Dokažte, že kvádry, na které je koule rozřezána, jsou ve skutečnosti krychle.

**3. úloha** Rytíři kulatého stolu se společně s králem (ten je také zároveň rytířem) chystají na slavnostní přípitek. Na začátku sluha nalil králi plný pohár a ostatním rytířům nic. Nyní se opakuje následující postup: Vyberou se dva sousední rytíři a ti si mezi sebou přelijou víno tak, aby měli oba stejně. Po konečném počtu kroků se rytířům podaří docílit toho, že mají všichni stejně vína. Určete možné počty rytířů.

**4. úloha** Nechtě  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost nezáporných reálných čísel taková, že  $\sum_n a_n = a$ . Dokažte, že  $\sum_n na_n$  konverguje, právě když konverguje  $\sum_n a - s_n$ , kde  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

**5. úloha** Nechtě  $X$  je (obloukově) souvislý metrický prostor. Rozhodněte, jestli nutně platí následující implikace: Jsou-li  $A, B$  neprázdné podmnožiny  $X$  takové, že  $A \cap B = \emptyset$  a  $\text{bd}(A) = \text{bd}(B)$ , potom uzávěr  $A \cup B$  je  $X$ .

**6. úloha** Spočtěte

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left( \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} \right) \cdot \left( \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} + \dots + \binom{n}{n} \right).$$