Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V.

a) $M = \{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

b) $M = \{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\}$, v prostoru V reálných polynomů stupně nejvýše tři.

c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ v prostoru $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Úloha 2: Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru $\mathbb{Z}_5^7$.

a) $U_1 = \mathcal{L}((4,1,0,3,4,0,0)^T, (4,3,1,0,2,3,1)^T, (4,1,4,0,3,2,4)^T,$
$(2,4,1,4,4,3,1)^T, (0,4,3,2,2,4,3)^T)$.

b) $V_1 = \{(x_1,\dots,x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0,$
$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0,\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\}$.

c) $U_2 = \mathcal{L}((1,2,4,2,3,1,2)^T, (2,3,4,1,2,1,3)^T, (3,4,1,1,4,1,4)^T,$
$(4,0,2,3,3,4,1)^T, (4,3,1,3,2,3,2)^T)$.

d) $V_2 = \{(x_1,\dots,x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 0,$
$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_7 = 0,\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 0\}$

Úloha 3: V prostoru reálných spojitých funkcí nad $\mathbb{R}$ uvažujme podprostor generovaný funkcemi $\sin^2(x)$, $\sin(2x)$, $\cos^2(x), \cos(2x)$ a $f(x) = 1$. Najděte bázi tohoto podprostoru.

Úloha 4: Ukažte, že pokud je V podprostorem prostoru W konečné dimenze, potom existují báze X prostoru V a báze Y prostoru W takové, že $X \subseteq Y$.

Úloha 5: Rozhodněte, zdali prostory U_i a V_i jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

Tyto podprostory $\mathbb{Z}_5^7$ jsou definovány následovně:

a) $U_1 = \mathcal{L}((4,1,0,3,4,0,0)^T, (4,3,1,0,2,3,1)^T, (4,1,4,0,3,2,4)^T,$
$(2,4,1,4,4,3,1)^T, (0,4,3,2,2,4,3)^T)$

$V_1 = \{(x_1,\dots,x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0,$
$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0,\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\}$

b) $U_2 = \mathcal{L}((1,2,4,2,3,1,2)^T, (2,3,4,1,2,1,3)^T, (3,4,1,1,4,1,4)^T,$
$(4,0,2,3,3,4,1)^T, (4,3,1,3,2,3,2)^T)$

$V_2 = \{(x_1,\dots,x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 0,$
$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_7 = 0,\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 0\}$

Úloha 6: V prostoru $\mathbb{R}^4$ určete souřadnice vektoru $[u]_X$ vzhledem k uspořádané bázi

$X = ((1,-3,7,2)^T, (3,2,1,-4)^T, (0,-1,4,-3)^T, (-2,4,-3,0)^T)$

pro vektory $u_1 = (2,2,9,-5)^T,\ u_2 = (-7,2,9,-8)^T$ a $u_3 = (4,-42,31,20)^T$.

Úloha 7: V prostoru polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 4 s bazí $X = (x^4 + x^3,\ x^3 + x^2,\ x^2 + x,\ x + 1,\ x^4 + 1)$
určete souřadnice $[f]_X$ následujících vektorů

a) $f(x) = x^4 - 1$.

b) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

c) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

d) $f(x) = x^3 + x$.

Úloha 8: Souřadnice vektoru u vůči uspořádané bázi $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$.