

## Úlohy ke cvičení

*Úloha 1:* Doplněte množinu  $M$  na bázi vektorového prostoru  $V$ .

- a)  $M = \{(1, 2, 0, 0)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (0, 1, 0, 1)^T\}$ ,  $V = \mathbb{R}^4$ .  
b)  $M = \{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\}$ , v prostoru  $V$  reálných polynomů stupně nejvýše tři.  
c)  $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  v prostoru  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

*Úloha 2:* Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru  $\mathbb{Z}_6^7$ .

- a)  $U_1 = \mathcal{L}(\{(4, 1, 0, 3, 4, 0, 0)^T, (4, 3, 1, 0, 2, 3, 1)^T, (4, 1, 4, 0, 3, 2, 4)^T, (2, 4, 1, 4, 4, 3, 1)^T, (0, 4, 3, 2, 2, 4, 3)^T\})$ .  
b)  $V_1 = \{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_6^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0, 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0, 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\}$ .  
c)  $U_2 = \mathcal{L}(\{(1, 2, 4, 2, 3, 1, 2)^T, (2, 3, 4, 1, 2, 1, 3)^T, (3, 4, 1, 1, 4, 1, 4)^T, (4, 0, 2, 3, 3, 4, 1)^T, (4, 3, 1, 3, 2, 3, 2)^T\})$ .  
d)  $V_2 = \{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_6^7 : x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 0, 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_7 = 0, x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 0\}$ .

*Úloha 3:* V prostoru reálných spojitých funkcí nad  $\mathbb{R}$  uvažujme podprostor generovaný funkcemi  $\sin^2(x)$ ,  $\sin(2x)$ ,  $\cos^2(x)$ ,  $\cos(2x)$  a  $f(x) = 1$ . Najděte bázi tohoto podprostoru.

*Úloha 4:* Ukázně, že pokud je  $V$  podprostorem prostoru  $W$  konečné dimenze, potom existují báze  $X$  prostoru  $V$  a báze  $Y$  prostoru  $W$  takové, že  $X \subseteq Y$ .

*Úloha 5:* Rozhodněte, zda-li prostory  $U_i$  a  $V_i$  jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

Tyto podprostory  $\mathbb{Z}_6^7$  jsou definovány následovně:

- a)  $U_1 = \mathcal{L}(\{(4, 1, 0, 3, 4, 0, 0)^T, (4, 3, 1, 0, 2, 3, 1)^T, (4, 1, 4, 0, 3, 2, 4)^T, (2, 4, 1, 4, 4, 3, 1)^T, (0, 4, 3, 2, 2, 4, 3)^T\})$ .  
 $V_1 = \{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_6^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0, 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0, 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\}$   
b)  $U_2 = \mathcal{L}(\{(1, 2, 4, 2, 3, 1, 2)^T, (2, 3, 4, 1, 2, 1, 3)^T, (3, 4, 1, 1, 4, 1, 4)^T, (4, 0, 2, 3, 3, 4, 1)^T, (4, 3, 1, 3, 2, 3, 2)^T\})$ .  
 $V_2 = \{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_6^7 : x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 0, 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_7 = 0, x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 0\}$

*Úloha 6:* V prostoru  $\mathbb{R}^4$  určete souřadnice vektoru  $[u]_X$  vzhledem k uspořádané bázi

$$X = \{(1, -3, 7, 2)^T, (3, 2, 1, -4)^T, (0, -1, 4, -3)^T, (-2, 4, -3, 0)^T\}$$

pro vektory  $u_1 = (2, 2, 9, -5)^T$ ,  $u_2 = (-7, 2, 9, -8)^T$  a  $u_3 = (4, -42, 31, 20)^T$ .

*Úloha 7:* V prostoru polynomů nad  $\mathbb{R}$  stupně nejvýše 4 s bázi  $X = (x^4 + x^3, x^3 + x^2, x^2 + x, x + 1, x^2 + 1)$  určete souřadnice  $[f]_X$  následujících vektorů

- a)  $f(x) = x^4 - 1$ .  
b)  $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ .  
c)  $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ .  
d)  $f(x) = x^3 + x$ .

*Úloha 8:* Souřadnice vektoru  $u$  vůči uspořádané bázi  $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  jsou  $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ . Určete souřadnice téhož vektoru  $u$  vůči bázi  $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$ .