

## Úlohy ke cvičení

*Úloha 1:* Nechť  $u, v, w$  jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru  $V$  nad  $\mathbb{R}$ . Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

- $\{u, u + v, u + w\}$ .
- $\{u + v, u - v, w\}$ .
- $\{u + v, u - v, u + w, u - w\}$ .
- $\{u + v, u + w, v + w\}$ .
- $\{u - v, u - w, v - w\}$ .
- $\{u - 2w + w, 3w + v - 2w, 7u + 14v - 13w\}$ .
- $\{u, 2u, w\}$ .
- $\{u, v + w\}$ .

*Úloha 2:* Určete, zdali je následující množina vektorů nezávislá v prostoru  $\mathbb{R}^4$ ,  $\mathbb{Z}_7^4$  a  $\mathbb{Z}_5^4$ . Pokud nikoli, najděte vyjádření nějakého vektoru jako lineární kombinaci ostatních.

- $X_1 = \{(0, 1, 2, 1)^T, (1, 2, 0, 0)^T, (1, 1, 2, 0)^T, (1, 2, 1, 1)^T\}$ .
- $X_2 = \{(1, 1, 2, 0)^T, (1, 2, 1, 1)^T, (0, 1, 2, 1)^T, (1, 1, 0, 0)^T\}$ .
- $X_3 = \{(1, 0, 2, 0)^T, (2, 1, 0, 2)^T, (0, 2, 2, 1)^T, (2, 2, 1, 1)^T\}$ .

*Úloha 3:* Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (nad tělesem  $\mathbb{R}$ )

- $\{2x - 1, x - 2, 3x\}$ .
  - $\{x^2 + 2x + 3, x + 1, x - 1\}$ .
  - $\{\sin(x), \cos(x)\}$ .
  - $\{\sin(x + 1), \sin(x + 2), \sin(x + 3)\}$ .
  - $\{\ln(x), \log(2x), \log_3(x^2)\}$ .
- (T.j. jde o přirozený, dekadický a binární logaritmus)

*Úloha 4:* Necht'  $V$  je vektorový prostor a  $X \subseteq Y \subseteq V$ . Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  závislá.
- Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  nezávislá.
- Je-li  $Y$  nezávislá, je  $X$  nezávislá.
- Je-li  $X$  závislá, je  $Y$  závislá.
- Je-li  $Y$  závislá, je  $X$  závislá.

## Úlohy ke cvičení

*Úloha 1:* Nechť  $u, v, w$  jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru  $V$  nad  $\mathbb{R}$ . Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

- $\{u, u + v, u + w\}$ .
- $\{u + v, u - v, w\}$ .
- $\{u + v, u - v, u + w, u - w\}$ .
- $\{u + v, u + w, v + w\}$ .
- $\{u - v, u - w, v - w\}$ .
- $\{u - 2w + w, 3w + v - 2w, 7u + 14v - 13w\}$ .
- $\{u, 2u, w\}$ .
- $\{u, v + w\}$ .

*Úloha 2:* Určete, zdali je následující množina vektorů nezávislá v prostoru  $\mathbb{R}^4$ ,  $\mathbb{Z}_7^4$  a  $\mathbb{Z}_5^4$ . Pokud nikoli, najděte vyjádření nějakého vektoru jako lineární kombinaci ostatních.

- $X_1 = \{(0, 1, 2, 1)^T, (1, 2, 0, 0)^T, (1, 1, 2, 0)^T, (1, 2, 1, 1)^T\}$ .
- $X_2 = \{(1, 1, 2, 0)^T, (1, 2, 1, 1)^T, (0, 1, 2, 1)^T, (1, 1, 0, 0)^T\}$ .
- $X_3 = \{(1, 0, 2, 0)^T, (2, 1, 0, 2)^T, (0, 2, 2, 1)^T, (2, 2, 1, 1)^T\}$ .

*Úloha 3:* Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (nad tělesem  $\mathbb{R}$ )

- $\{2x - 1, x - 2, 3x\}$ .
  - $\{x^2 + 2x + 3, x + 1, x - 1\}$ .
  - $\{\sin(x), \cos(x)\}$ .
  - $\{\sin(x + 1), \sin(x + 2), \sin(x + 3)\}$ .
  - $\{\ln(x), \log(2x), \log_3(x^2)\}$ .
- (T.j. jde o přirozený, dekadický a binární logaritmus)

*Úloha 4:* Necht'  $V$  je vektorový prostor a  $X \subseteq Y \subseteq V$ . Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  závislá.
- Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  nezávislá.
- Je-li  $Y$  nezávislá, je  $X$  nezávislá.
- Je-li  $X$  závislá, je  $Y$  závislá.
- Je-li  $Y$  závislá, je  $X$  závislá.