Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Invertujte následující matice v tělesech $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Úloha 2: Označme symbolem $\mathbb{R}^+$ kladná reálná čísla a definujme operace $\oplus$ na $\mathbb{R}^+$ a $\odot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ následovně:

$$u \oplus v = uv, \qquad a \odot u = u^a$$

Je $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ vektorovým prostorem nad $\mathbb{Q}$?

Úloha 3: Nechť X je libovolná neprázdná množina a $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ je těleso.

Označme $\mathbb{K}^X$ množinu všech zobrazení $f : X \to \mathbb{K}$.

Definujme součet $\oplus$ na $\mathbb{K}^X$ a součin $\odot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X$ následovně:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (a \odot f)(x) = a \cdot f(x).$$

a) Ukažte, že $(\mathbb{K}^X, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor.

b) Jaký vektorový prostor získáme, je-li X konečná?

c) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $X = \mathbb{N}$?

d) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $\mathbb{K}, X = \mathbb{R}$?

Úloha 4: Kolik prvků má aritmetický vektorový prostor $\mathbb{Z}_5^4$? Kolik prvků má nějaký nejmenší a nějaký největší vlastní podprostor $\mathbb{Z}_5^4$? Vypište prvky nejmenšího podprostoru $\mathbb{Z}_5^4$, který obsahuje vektory $(0,0,0,4)^T, (2,4,3,2)^T$ a $(1,2,4,3)^T$.

Úloha 5: V systému podmnožin množiny $A = \{a,b,c,d,e\}$ braném jako vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$ určete

- nulový vektor $\mathbf{0}$,
- opačný vektor $-\mathbf{u}$ k vektoru $\mathbf{u} = \{b,d,e\}$,
- výsledek lineární kombinace $\mathbf{s} = 1 \cdot \mathbf{v} + 1 \cdot \mathbf{w} + 0 \cdot \mathbf{x} + 1 \cdot \mathbf{y}$,
  kde $\mathbf{v} = \{a,c,d\}$, $\mathbf{w} = \{b,c\}$, $\mathbf{x} = \{a,b,d,e\}$ a $\mathbf{y} = \{b,e\}$,
- zdali lze zapsat vektor $\mathbf{z} = \{a,b,e\}$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

Úloha 6: Rozhodněte, zdali je struktura $(\{0,1,2,3,4,5\}, \oplus, \odot)$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_3$, kde $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \mod 6$ a $a \odot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} \mod 6$.

Úloha 7: V prostoru $\mathbb{R}^4$ zapište vektor $(-7,12,2,-4)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(-5,5,1,-1)^T$, $(2,-5,0,2)^T$, $(3,2,0,-2)^T$ a $(2,-3,1,1)^T$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Úloha 8: Ukažte, že pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ řádu $m \times n$ nad tělesem $\mathbb{K}$ platí, že její jádro $Ker(\mathbf{A})$ je podprostorem $\mathbb{K}^n$.