

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Určete grafy, cykly, rozklad na transpozice, počet inverzí, znaménko a inverzní permutace u následujících permutací: p , q a u jejich složení $q \circ p$ a $p \circ q$.

(Permutace skládáme jako zobrazení, tedy $(q \circ p)(i) = q(p(i))$.)

- a) $p = (6, 4, 1, 5, 3, 2)$, $q = (6, 4, 3, 2, 5, 1)$.
- b) $p = (1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 8, 9)$, $q = (1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$.
- c) $p = (5, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7, 6)$, $q = (8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9)$.
- d) $p = (3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7)$, $q = (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$.

Úloha 2: Ukažte čtyřmi způsoby, proč má inverzní permutace p^{-1} stejné znaménko jako původní permutace p ?

Úloha 3: Ukažte, že každou permutaci na n prvcích, lze rozložit na transpozice typu $(1, i)$ pro $i \in \{2, \dots, n\}$.

Pokuste se omezit délku výsledného rozkladu.

Úloha 4: Kolik existuje permutací množiny $\{1, \dots, n\}$ s právě jedním cyklem?

Úloha 5: Spočítejte mocniny p^{10} a q^{99} pro permutace p a q .

- a) $p = (6, 4, 1, 5, 3, 2)$, $q = (6, 4, 3, 2, 5, 1)$.
- b) $p = (1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 8, 9)$, $q = (1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$.
- c) $p = (5, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7, 6)$, $q = (8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9)$.
- d) $p = (3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7)$, $q = (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$.

Úloha 6: Řešte "permutační" rovnici $p \circ x \circ q = \iota$ pro permutace p a q .

- a) $p = (6, 4, 1, 5, 3, 2)$, $q = (6, 4, 3, 2, 5, 1)$.
- b) $p = (1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 8, 9)$, $q = (1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$.
- c) $p = (5, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7, 6)$, $q = (8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9)$.
- d) $p = (3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7)$, $q = (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$.

Úloha 7: Určete znaménko následující permutace

- a) $p = (1, 3, 5, \dots, 2n - 1, 2, 4, 6, \dots, 2n)$
- b) $p = (1, 4, 7, \dots, 3n - 2, 2, 5, 8, \dots, 3n - 1, 3, 6, 9, \dots, 3n)$
- c) $p = (2, 5, 8, \dots, 3n - 1, 3, 6, 9, \dots, 3n, 1, 4, 7, \dots, 3n - 2)$
- d) $p = (3, 6, 9, \dots, 3n, 2, 5, 8, \dots, 3n - 1, 1, 4, 7, \dots, 3n - 2)$

Úloha 8: Nalezněte nějakou permutaci p na 10 prvcích takovou, že p^i není identita (značíme $p^i \neq \iota$) pro všechna $i = 1, \dots, 29$.

Úloha 9: Kolik je na n prvcích permutací se znaménkem 1 a kolik je jich se znaménkem -1 ?

Úloha 10: Spočítejte výrazy

- a) $(3 + 2i) + (1 - 3i)$,
- b) $(3 + 2i) - (1 - 3i)$,
- c) $(3 + 2i)(1 - 3i)$,
- d) $(3 + 2i)/(1 - 3i)$,
- e) $(1 + i)^{20}$.

Úloha 11: Vyřešte soustavu lineárních rovnic v tělese komplexních čísel \mathbb{C} .

- a)
$$\begin{array}{rcl} x_1 + ix_2 & = & i \\ ix_1 + (1 - i)x_2 & = & -1 \end{array}$$
- b)
$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + (2 + 2i)x_2 + 2ix_3 & = & 1 \\ (1 - i)x_1 + (1 + 3i)x_2 + (i - 1)x_3 & = & 0 \\ (1 + i)x_1 + (1 - i)x_2 + (1 + i)x_3 & = & 1 \end{array}$$