Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Spočtěte součiny $\mathbf{AB}_i$ a $\mathbf{B}_i\mathbf{A}$, pro matice
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Jakým úpravám matice $\mathbf{A}$ odpovídají příslušné součiny?

Úloha 2: Najděte nenulovou matici $\mathbf{A}$ takovou, že $\mathbf{AA} = \mathbf{0}$.

Úloha 3: Ukažte, že platí:

a) Matice $\mathbf{AA}^T$ je vždy symetrická.

b) Každá matice typu $m \times n$ splňuje $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{AI}_n$.

c) Součin regulárních matic je regulární.

Úloha 4: Invertujte reálnou matici

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Úloha 5: Určete inverzní matice k následujícím elementárním maticím:

a)

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

což je matice, která vznikne z jednotkové prohozením i. a j. řádku.

b)

$$E_i(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde m se objevuje pouze v i. sloupci a i. řádku a $m \neq 0$

c)

$$E_{i,j}(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & m & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde m se objeví pouze v j. řádku a i. sloupci.

Úloha 6: Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vyřešte maticové rovnice

a) $(\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}$

b) $\mathbf{X}_2\mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D}$

c) $\mathbf{A}\mathbf{X}_3^{-1} = \mathbf{E}^T$

Úloha 7: Najděte inverzní matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 8: Nechť $\mathbf{A}^2$ má inverzi $\mathbf{B}$. Dokažte, že i matice $\mathbf{A}$ je invertovatelná a nalezněte její inverzi.

Úloha 9: Spočtěte součin matic

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

a vysvětlete jaký je význam těchto matic jednotlivě a jejich součinu.