

## Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Řešte soustavu lineárních rovnic.

a)

$$\begin{array}{rccccrcr} 17a & +9b & -9c & +3d & = & -8 \\ 11a & & +2c & & = & -7 \\ 13a & +2b & -c & & = & -9 \\ 7a & +3b & -5c & +d & = & -8 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rccccrcr} 17a & +8b & +4c & +7d & = & 30 \\ -11a & & & +3d & = & -2 \\ 7a & +2b & +c & -2d & = & -1 \\ 13a & +6b & & -2d & = & 7 \end{array}$$

Úloha 2: Ukažte, že jsou-li  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  a  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T$  dvě řešení dané soustavy lineárních rovnic, je také řešením i  $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}' = (\alpha x_1 + (1-\alpha)x'_1, \alpha x_2 + (1-\alpha)x'_2, \dots, \alpha x_n + (1-\alpha)x'_n)^T$  pro libovolné reálné číslo  $\alpha$ . Zobecněte tuto úvahu i pro více různých řešení  $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \dots, \mathbf{x}^{(k)}$  dané soustavy.

Úloha 3: Popište všechna řešení následující soustavy lineárních rovnic a proveďte zkoušku.

a)

$$\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 1 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l} -x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 3 \end{array}$$

Úloha 4: Najděte všechna řešení soustavy s následující maticí nad tělesem  $\mathbb{Z}_7$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

Úloha 5: Řešte soustavy rovnic  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^1$ ,  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^2$  a  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^3$  pro:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jak spolu souvisí geometrické interpretace těchto soustav?

Úloha 6: Vzhledem k parametru  $a$  řešte soustavu rovnic s maticí:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right)$$

Úloha 7: Dokažte, anebo vyvráťte, zdali pro matice  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  a  $\mathbf{0}$  stejného řádu a reálná čísla  $\alpha, \beta$  platí:

- |  |   |
|--|---|
| a) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ | h) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$          |
| b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$                               | i) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$                |
| c) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$  | j) $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} = (\alpha + \beta)(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ |
| d) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$                               | k) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$  |
| e) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = \beta(\alpha\mathbf{A})$                               | l) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$                      |
| f) $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{A} = \mathbf{0}$  | m) $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha(\mathbf{A}^T)$                                    |
| g) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$  |   |

Úloha 8: Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovou matici  $\mathbf{A}$  zkonstruujte symetrickou matici  $\mathbf{B}$  tak, že jejich součin nekomutuje, t.j.  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ .

Komutuje součin matic pokud jsou obě matice symetrické?

Úloha 9: Nechť  $A$  je  $m \times n$  matice a  $B$  je  $n \times p$  matice. Rozhodněte, zda (vždy) platí.

- a)  $(AB)^T = A^T B^T$ .  
b)  $(AB)^T = B^T A^T$ .

Úloha 10: Pro reálné matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- a) Spočítejte součin  $\mathbf{AB}$ .  
b) Spočítejte součin  $\mathbf{BA}$ .  
c) Spočítejte součin  $\mathbf{CD}$ .  
d) Spočítejte součin  $\mathbf{DE}$ .