Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Řešte soustavu lineárních rovnic.

a)

$$\begin{array}{rrrrcr} 17a & +9b & -9c & +3d & = & -8 \\ 11a & & +2c & & = & -7 \\ 13a & +2b & -c & & = & -9 \\ 7a & +3b & -5c & +d & = & -8 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrrrcr} 17a & +8b & +4c & +7d & = & 30 \\ -11a & & & +3d & = & -2 \\ 7a & +2b & +c & -2d & = & -1 \\ 13a & +6b & & -2d & = & 7 \end{array}$$

Úloha 2: Ukažte, že jsou-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ a $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)^T$ dvě řešení dané soustavy lineárních rovnic, je také řešením i $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}' = (\alpha x_1 + (1-\alpha)x'_1, \alpha x_2 + (1-\alpha)x'_2, \ldots, \alpha x_n + (1-\alpha)x'_n)^T$ pro libovolné reálné číslo α. Zobecněte tuto úvahu i pro více různých řešení $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ dané soustavy.

Úloha 3: Popište všechna řešení následující soustavy lineárních rovnic a proveďte zkoušku.

a)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Úloha 4: Najděte všechna řešení soustavy s následující maticí nad tělesem $\mathbb{Z}_7$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Úloha 5: Řešte soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^1$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^2$ a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^3$ pro:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jak spolu souvisí geometrické interpretace těchto soustav?

Úloha 6: Vzhledem k parametru a řešte soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

Úloha 7: Dokažte, anebo vyvraťte, zdali pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a $\mathbf{0}$ stejného řádu a reálná čísla α, β platí:

a) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
c) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$
d) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$
e) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = \beta(\alpha\mathbf{A})$
f) $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{A} = \mathbf{0}$
g) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$
h) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$
i) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$
j) $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} = (\alpha + \beta)(\mathbf{A} + \mathbf{B})$
k) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
l) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
m) $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha(\mathbf{A}^T)$

Úloha 8: Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovu matici $\mathbf{A}$ zkonstruujte symetrickou matici $\mathbf{B}$ tak, že jejich součin nekomutuje, t.j. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Komutuje součin matic pokud jsou obě matice symetrické?

Úloha 9: Nechť A je $m \times n$ matice a B je $n \times p$ matice. Rozhodněte, zda (vždy) platí.

a) $(AB)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} B^\mathsf{T}$.
b) $(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$.

Úloha 10: Pro reálné matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a) Spočítejte součin $\mathbf{AB}$.
b) Spočítejte součin $\mathbf{BA}$.
c) Spočítejte součin $\mathbf{CD}$.
d) Spočítejte součin $\mathbf{DE}$.