Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Určete matice následujících lineárních zobrazení v rovině ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) vůči kanonické bázi K.

a) osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu.

b) otočení o $90°$ kolem počátku proti směru hodinových ručiček.

c) otočení o úhel α kolem počátku proti směru hodinových ručiček (první osa je vodorovná, druhá svislá).

d) projekce na první souřadnici $p_1 : (x, y) \to (x, 0)$.

Úloha 2: Nalezněte matici zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ vůči kanonické bázi K (shodná báze v obou prostorech). O zobrazení f je známo, že převádí vektory $u_1 = (2, 4, 1)^T$, $u_2 = (2, 3, 4)^T$ a $u_3 = (3, 0, 1)^T$ na vektory $f(u_1) = (2, 1, 2)^T$, $f(u_2) = (0, 4, 1)^T$ a $f(u_3) = (4, 4, 1)^T$.

Úloha 3: Ukažte, že platí $[id]_{AB} = ([id]_{BK})^{-1}[id]_{AK}$.

Úloha 4: Mějme v prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ dané báze
$A = ((1, 2, 0, 1)^T, (4, 1, 3, 1)^T, (3, 1, 3, 4)^T, (2, 0, 2, 2)^T)$,
$B = ((1, 2, 3, 1)^T, (4, 4, 1, 1)^T, (2, 0, 2, 1)^T, (3, 1, 4, 0)^T)$.
Nalezněte matice přechodu:

a) $[id]_{AK}$, tj. od báze A ke kanonické bázi.

b) $[id]_{KB}$, tj. od kanonické báze k bázi B.

c) $[id]_{AB}$, tj. od báze A k bázi B.

Úloha 5: Odvoďte součtové vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$ a $\cos(\alpha + \beta)$ užitím matic zobrazení.

Úloha 6: Nechť prostor polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 4 má bázi $A = (x^4 + x^3,\ x^3 + x^2,\ x^2 + x,\ x + 1,\ x^4 + 1)$. Určete matici $[D_x]_{AK}$ pro zobrazení D_x jež funkci $f(x)$ přiřadí její derivaci $f'(x)$.

(Za kanonickou bázi zde považujte $K = (x^0, \ldots, x^4)$.)

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Určete matice následujících lineárních zobrazení v rovině ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) vůči kanonické bázi K.

a) osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu.

b) otočení o $90°$ kolem počátku proti směru hodinových ručiček.

c) otočení o úhel α kolem počátku proti směru hodinových ručiček (první osa je vodorovná, druhá svislá).

d) projekce na první souřadnici $p_1 : (x, y) \to (x, 0)$.

Úloha 2: Nalezněte matici zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ vůči kanonické bázi K (shodná báze v obou prostorech). O zobrazení f je známo, že převádí vektory $u_1 = (2, 4, 1)^T$, $u_2 = (2, 3, 4)^T$ a $u_3 = (3, 0, 1)^T$ na vektory $f(u_1) = (2, 1, 2)^T$, $f(u_2) = (0, 4, 1)^T$ a $f(u_3) = (4, 4, 1)^T$.

Úloha 3: Ukažte, že platí $[id]_{AB} = ([id]_{BK})^{-1}[id]_{AK}$.

Úloha 4: Mějme v prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ dané báze
$A = ((1, 2, 0, 1)^T, (4, 1, 3, 1)^T, (3, 1, 3, 4)^T, (2, 0, 2, 2)^T)$,
$B = ((1, 2, 3, 1)^T, (4, 4, 1, 1)^T, (2, 0, 2, 1)^T, (3, 1, 4, 0)^T)$.
Nalezněte matice přechodu:

a) $[id]_{AK}$, tj. od báze A ke kanonické bázi.

b) $[id]_{KB}$, tj. od kanonické báze k bázi B.

c) $[id]_{AB}$, tj. od báze A k bázi B.

Úloha 5: Odvoďte součtové vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$ a $\cos(\alpha + \beta)$ užitím matic zobrazení.

Úloha 6: Nechť prostor polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 4 má bázi $A = (x^4 + x^3,\ x^3 + x^2,\ x^2 + x,\ x + 1,\ x^4 + 1)$. Určete matici $[D_x]_{AK}$ pro zobrazení D_x jež funkci $f(x)$ přiřadí její derivaci $f'(x)$.

(Za kanonickou bázi zde považujte $K = (x^0, \ldots, x^4)$.)