

## Úlohy ke cvičení

*Úloha 1:* Má-li rovinný graf celkem 12 stěn, každá z nich je pětiboká a každý vrchol má stupeň 3, kolik má vrcholů?

*Úloha 2:* Na dětském táboře je 15 dětí, každý den mají tři děti službu v kuchyni, a platí, že každá dvojice dětí má právě jednou společnou službu. Kolik dní trvá tábor?

*Úloha 3:* Při zápočtovém písemce každý student vyřešil aspoň třetinu všech úloh, a navíc většina studentů vyřešila aspoň dvě třetiny úloh. Ukažte, že v písemce existuje úloha, kterou vyřešila většina studentů.

*Úloha 4:* Dvacet studentů psalo písemku, která měla čtyři úlohy. Pro každou dvojici studentů bychom v písemce našli úlohu, kterou oba vyřešili správně. Dokážte, že některou z úloh správně vyřešila většina studentů.

*Úloha 5:* V matici  $10 \times 10$  jsou čísla  $\{1, 2, \dots, 10\}$  zapsána tak, že každé číslo má deset výskytů. Ukažte, že pak v některém sloupci nebo řádku nalezneme alespoň čtyři různá čísla.

Obecně, když se v matici  $n \times n$  každé číslo vyskytuje přesně  $n$ -krát, potom nějaký řádek či sloupec má aspoň  $\sqrt{n}$  různých čísel. Pokud je  $\sqrt{n}$  celé číslo, je ten odhad těsný.

*Úloha 6:* Určete počet kostek následujících grafi

- $C_m \oplus_e C_n$  (sepním za hranu)
- $C_m \oplus_e K_n$
- $K_m \oplus_e K_n$
- $K_n \div e$  (podrozdělíme jednu hranu)
- $K_n \div E$  (podrozdělíme všechny hrany)
- $2K_n$  (ke každé hraně přidáme jednu paralelní)
- $K_{m,n}$
- $K_{m,n} - e$
- $K_{m,n} \div E$

*Úloha 7:* Matematické soutěže se zúčastnilo 21 chlapců a 21 dívek. Každý ze soutěžících vyřešil nejvýše 6 úloh. Dále, pro každou dívku a každého chlapce platí, že aspoň jednu úlohu vyřešili oba zároveň. Dokážte, že existuje úloha, kterou zároveň vyřešili alespoň tři dívky a alespoň tři chlapci.

## Úlohy ke cvičení

*Úloha 1:* Má-li rovinný graf celkem 12 stěn, každá z nich je pětiboká a každý vrchol má stupeň 3, kolik má vrcholů?

*Úloha 2:* Na dětském táboře je 15 dětí, každý den mají tři děti službu v kuchyni, a platí, že každá dvojice dětí má právě jednou společnou službu. Kolik dní trvá tábor?

*Úloha 3:* Při zápočtovém písemce každý student vyřešil aspoň třetinu všech úloh, a navíc většina studentů vyřešila aspoň dvě třetiny úloh. Ukažte, že v písemce existuje úloha, kterou vyřešila většina studentů.

*Úloha 4:* Dvacet studentů psalo písemku, která měla čtyři úlohy. Pro každou dvojici studentů bychom v písemce našli úlohu, kterou oba vyřešili správně. Dokážte, že některou z úloh správně vyřešila většina studentů.

*Úloha 5:* V matici  $10 \times 10$  jsou čísla  $\{1, 2, \dots, 10\}$  zapsána tak, že každé číslo má deset výskytů. Ukažte, že pak v některém sloupci nebo řádku nalezneme alespoň čtyři různá čísla.

Obecně, když se v matici  $n \times n$  každé číslo vyskytuje přesně  $n$ -krát, potom nějaký řádek či sloupec má aspoň  $\sqrt{n}$  různých čísel. Pokud je  $\sqrt{n}$  celé číslo, je ten odhad těsný.

*Úloha 6:* Určete počet kostek následujících grafi

- $C_m \oplus_e C_n$  (sepním za hranu)
- $C_m \oplus_e K_n$
- $K_m \oplus_e K_n$
- $K_n \div e$  (podrozdělíme jednu hranu)
- $K_n \div E$  (podrozdělíme všechny hrany)
- $2K_n$  (ke každé hraně přidáme jednu paralelní)
- $K_{m,n}$
- $K_{m,n} - e$
- $K_{m,n} \div E$

*Úloha 7:* Matematické soutěže se zúčastnilo 21 chlapců a 21 dívek. Každý ze soutěžících vyřešil nejvýše 6 úloh. Dále, pro každou dívku a každého chlapce platí, že aspoň jednu úlohu vyřešili oba zároveň. Dokážte, že existuje úloha, kterou zároveň vyřešili alespoň tři dívky a alespoň tři chlapci.