Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Nalezněte vzorec (analytické vyjádření) pro n-tý člen posloupnosti zadané pomocí rekurence:

a) $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + 1$

b) $a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3$

c) $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$

d) $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - 4$

e) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$

f) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n) + 1$

g) $a_0 = 2, a_1 = 3, a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$

h) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 2$

i) $a_0 = a_1 = 1, 5a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$

Úloha 2:

a) V posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ je vždy každý další člen aritmetickým průměrem dvou předchozích členů (t.j. $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+a_n}{2}$ pro $n \geq 0$).

V závislosti na prvních dvou členech a_0, a_1 spočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n$.

b) V posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ je vždy každý další člen aritmetickým průměrem všech předchozích členů (t.j. $a_n = \frac{a_0+\ldots+a_{n-1}}{n}$ pro $n \geq 2$).

V závislosti na prvních dvou členech a_0, a_1 spočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n$

Úloha 3: Pro posloupnost zadanou rekurentním vztahem $a_0 = 2, a_1 = 8, a_{n+2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}$ určete $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Úloha 4: Kolik existuje různých triangulací pravidelného n-úhelníku s označenými vrcholy?

Úloha 5:

a) Kolika způsoby je možné vydláždit obdélník o rozměrech $2 \times n$ pomocí dlaždic 1×2?

b) A kolik různých způsobů dláždění stejnými dlaždicemi má obdélník o rozměrech $3 \times n$?

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Nalezněte vzorec (analytické vyjádření) pro n-tý člen posloupnosti zadané pomocí rekurence:

a) $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + 1$

b) $a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3$

c) $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$

d) $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - 4$

e) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$

f) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n) + 1$

g) $a_0 = 2, a_1 = 3, a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$

h) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 2$

i) $a_0 = a_1 = 1, 5a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$

Úloha 2:

a) V posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ je vždy každý další člen aritmetickým průměrem dvou předchozích členů (t.j. $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+a_n}{2}$ pro $n \geq 0$).

V závislosti na prvních dvou členech a_0, a_1 spočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n$.

b) V posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ je vždy každý další člen aritmetickým průměrem všech předchozích členů (t.j. $a_n = \frac{a_0+\ldots+a_{n-1}}{n}$ pro $n \geq 2$).

V závislosti na prvních dvou členech a_0, a_1 spočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n$

Úloha 3: Pro posloupnost zadanou rekurentním vztahem $a_0 = 2, a_1 = 8, a_{n+2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}$ určete $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Úloha 4: Kolik existuje různých triangulací pravidelného n-úhelníku s označenými vrcholy?

Úloha 5:

a) Kolika způsoby je možné vydláždit obdélník o rozměrech $2 \times n$ pomocí dlaždic 1×2?

b) A kolik různých způsobů dláždění stejnými dlaždicemi má obdélník o rozměrech $3 \times n$?