

## Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte následující odhad faktoriálu:  $n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Úloha 2: Jakou nejvyšší mocninou 5 je dělitelné  $50!$ ? Určete obecný vzorec pro prvočíslo  $p$  a faktoriál čísla  $n$ .

Úloha 3: Ukažte, že  $(k!)^n$  dělí  $(kn)!$ .

Úloha 4: Porovnejte a uspořádejte následující kombinační čísla:

$$\binom{80}{20}, \binom{90}{10}, \binom{90}{70}, \binom{90}{30}, \binom{80}{70}, \binom{80}{60}.$$

Úloha 5: Zkuste odhadnout  $\binom{2m+1}{m}$  z obou stran pomocí  $\binom{2m}{m}$ .

Úloha 6: Nechť  $a$  je kladné reálné číslo, pro které platí nerovnost  $1+x \leq a^x$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ . Dokažte, že potom  $a = e$ .

Úloha 7: Dokažte dolní odhad faktoriálu:  $e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$

Úloha 8: Odhadněte součet řady  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

Úloha 9: V analýze algoritmů se občas objevuje tzv. harmonické číslo

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

a) Pro  $n = 2^m$  dokažte  $1 + \frac{m}{2} \leq H_n \leq 1 + m$ .

b) Dokažte obecný odhad  $\ln n \leq H_n \leq 1 + \ln n$ .